

Hauptprüfung 2004 Aufgabe 7

7.1

Die Gesamtkosten eines Produktionsbetriebes sind von der Ausbringungsmenge x abhängig und lassen sich durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschreiben. Bei einer Produktion von 6 ME (Mengeinheiten) entstehen Gesamtkosten von 32 GE (Geldeinheiten) und Differenzialkosten (Grenzkosten) von 5 GE. Die fixen Kosten betragen 20 GE. Das Minimum der variablen Stückkosten liegt bei einer Ausbringungsmenge von 4 ME. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Kostenfunktion.

(6 Punkte)

7.2

Gegeben ist die Gesamtkostenfunktion K durch

$$K(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 20$$

Die Kapazitätsgrenze wird bei einer Produktion von 14 ME erreicht.

7.2.1

Zu welchem konstanten Stückpreis wird das Produkt verkauft, wenn die Nutzenschwelle bei 2 ME liegt ?

(3 Punkte)

7.2.2

Die Erlösfunktion E ist nun gegeben durch $E(x) = 12x$. Berechnen Sie die Nutzengrenze und den maximalen Gewinn.

(6 Punkte)

7.2.3

Zeichnen Sie das Schaubild von K für $0 \leq x \leq 14$.

(2 Punkte)

7.2.4

Bestimmen Sie graphisch und rechnerisch das Betriebsoptimum x_{opt} .

(6 Punkte)

7.2.5

Berechnen Sie die kurzfristige Preisuntergrenze.

(3 Punkte)

7.3

Die fixen Kosten sind gestiegen, die variablen Kosten und der Marktpreis des Produkts bleiben unverändert. Der maximale Gewinn liegt nun bei 40 GE. Wie lautet die Gleichung der neuen Kostenfunktion ? Begründen Sie Ihre Lösung.

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2004 Aufgabe 7

7.1

Ansatz für die Kostenfunktion: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Außerdem gilt $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = ax^2 + bx + c$ mit $k'_v(x) = 2ax + b$

Folgende Bedingungen ergeben sich aus dem Aufgabentext:

$$K(6) = 32 \Rightarrow 32 = 216a + 36b + 6c + d \quad (x = 6 \text{ ME kosten } 32 \text{ GE})$$

$$K'(6) = 5 \Rightarrow 108a + 12b + c = 5 \quad (\text{bei } x = 6 \text{ ME ergeben sich Grenzkosten von } 5 \text{ GE})$$

$$K(0) = 20 \Rightarrow d = 20 \quad (\text{Fixkosten betragen } 20 \text{ GE})$$

$$k'_v(4) = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \quad (\text{Minimum der variablen Stückkosten bei } x = 4 \text{ ME})$$

$$\begin{array}{rclcl} 216a & + & 36b & + & 6c & + & d & = & 32 \\ 108a & + & 12b & + & c & & & = & 5 \\ & & & & & & d & = & 20 \\ & & 8a & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

Mit dem GTR ergibt sich: $a = \frac{1}{8}$, $b = -1$, $c = \frac{7}{2}$, $d = 20$

Die Kostenfunktion lautet $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 20$.

7.2.1

Da $K(2) = 24$ gilt, folgt $E(2) = 24$.

Mit dem Ansatz $E(x) = p \cdot x$ für die Erlösfunktion folgt $E(2) = 2p = 24 \Rightarrow p = 12$.

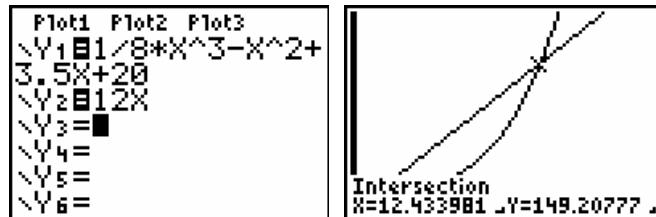
Die Erlösfunktion lautet $E(x) = 12x$.

7.2.2

Berechnung der Nutzengrenze:

Die Nutzengrenze ergibt sich als rechte Schnittstelle der Kosten- und der Erlösfunktion.

$$\text{Ansatz: } K(x) = E(x) \Rightarrow \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 20 = 12x$$



Die Nutzengrenze liegt bei $x = 12,43$ ME.

Berechnung des maximalen Gewinns:

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = E(x) - K(x) = 12x - \left(\frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 20 \right)$

$$= -\frac{1}{8}x^3 + x^2 + \frac{17}{2}x - 20$$

1. Lösungsmöglichkeit: ohne GTR

Hinreichende Bedingung für maximalen Gewinn: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

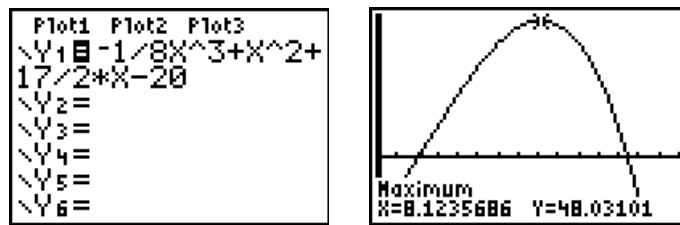
Es gilt $G'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2x + \frac{17}{2}$ und $G''(x) = -\frac{3}{4}x + 2$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{8}x^2 + 2x + \frac{17}{2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12,75}}{-0,75} \Rightarrow x_1 = 8,12 \text{ und } x_2 = -2,79$$

$G''(8,12) < 0 \Rightarrow$ Maximum (die andere Lösung ist negativ und daher nicht sinnvoll)

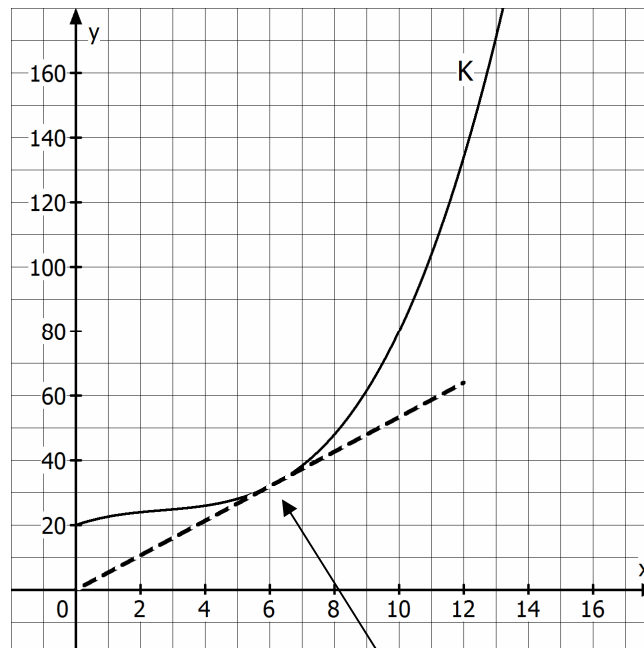
Es gilt $G(8,12) = 48,03$ GE und dies ist der maximale Gewinn.

2. Lösungsmöglichkeit: mit GTR



Mit dem GTR ergibt sich ein Maximum für $x = 8,12$ mit $G(8,12) = 48,03$.

7.2.3 / 7.2.4



Berührungspunkt bei $x_{\text{opt}} \approx 6,1$ ME

Das Betriebsoptimum ergibt sich zeichnerisch als Berührstelle der Kostenfunktion mit der Tangente, die vom Ursprung aus an den Graphen der Funktion $K(x)$ angelegt wird.

Rechnerische Bestimmung des Betriebsoptimums (= Minimumstelle der Stückkostenfunktion $k(x)$)

Bedingung: $k'(x) = 0$ mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$$k(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2} + \frac{20}{x} = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2} + 20x^{-1}$$

$$k'(x) = \frac{1}{4}x - 1 - 20x^{-2} = \frac{1}{4}x - 1 - \frac{20}{x^2}$$

$$k'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x - 1 - \frac{20}{x^2} = 0$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $x = 6,129$.

7.2.5

Die kurzfristige Preisuntergrenze ist die Minimumstelle der variablen Stückkostenfunktion $k_v(x)$.

Es gilt $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2}$ mit $k'_v(x) = \frac{1}{4}x - 1$ und $k''_v(x) = \frac{1}{4}$

Hinreichende Bedingung für Minimum: $k'_v(x) = 0$ und $k''_v(x) > 0$

$$k'_v(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$k''_v(4) > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x = 4 \text{ mit } k_v(4) = 1,5 \text{ GE.}$$

Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt 1,5 GE/ME.

7.3

Die neue Kostenfunktion lautet $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + C$ wobei C die unbekannte fixen Kosten darstellen.

Der bisherige maximale Gewinn war 48,03 GE (siehe 7.2.2). Da der künftige maximale Gewinn 40 GE betragen soll, steigen die Fixkosten um $48,03 - 40 = 8,03$ GE.

Damit steigen die bisherigen Fixkosten von 20 GE auf 28,03 GE.

Die neue Kostenfunktion lautet daher $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 28,03$