

Hauptprüfung 2003 Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild sei K_1 .

1.1

Untersuchen Sie K_1 rechnerisch auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Hoch- und Tiefpunkte.

Zeichnen Sie K_1 in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(7 Punkte)

1.2

Gegeben ist die Parabel K_2 mit der Gleichung $y = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{3}x$.

Die Schaubilder K_1 und K_2 schließen zwei Flächenstücke ein.

Um wie viel unterscheiden sich die Inhalte der beiden Flächen ?

(6 Punkte)

1.3

Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = -\frac{3}{2}x - 2$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_1 , die parallel zu g verläuft und K_2 senkrecht schneidet.

(5 Punkte)

1.4

Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $0 < u < 3$ schneidet K_1 im Punkt A und K_2 im Punkt B. Die Punkte A, B und C(3/0) bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks für $u = 1,5$.

Zeigen Sie: Es gibt Werte für u ($0 < u < 3$), für die das Dreieck einen größeren Flächeninhalt hat.

(7 Punkte)

1.5

Für eine Funktion h gilt: $h'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus 1.1 die Extrem- und Wendestellen von h .

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 1

1.1

Schnitt mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkte mit der x-Achse: Setze $f_1(x) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \quad | \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 3 \text{ oder } x_3 = -5.$$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0/0)$, $N_2(3/0)$, $N_3(-5/0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0/0) = N_1$

Extrempunkte:

$$\text{Es gilt } f_1'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2} \text{ und } f_1''(x) = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$$

Hinreichende Bedingung: $f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 10$$

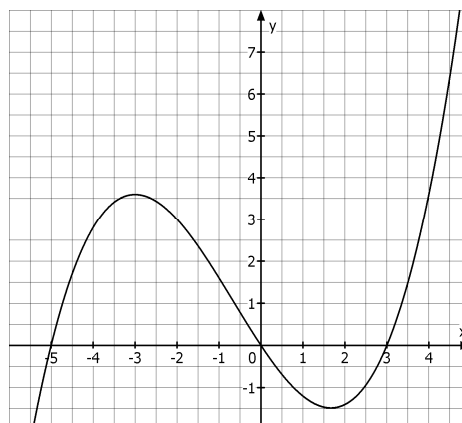
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}}{6} = \frac{-4 \pm 14}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \text{ oder } x_2 = -3$$

$$f_1''\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{5} > 0 \Rightarrow T\left(\frac{5}{3} / f_1\left(\frac{5}{3}\right)\right) = T\left(\frac{5}{3} / -\frac{40}{27}\right)$$

$$f_1''(-3) = \frac{3}{5} \cdot (-3) + \frac{2}{5} < 0 \Rightarrow H(-3 / f_1(-3)) = H(-3 / 3,6)$$

Schaubild:

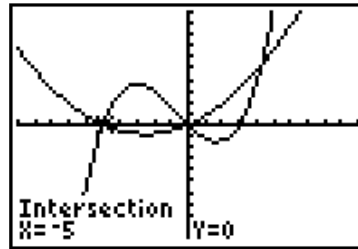


1.2

Es sei $f_2(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{3}x$

Zunächst werden die Schnittpunkte der beiden Schaubilder berechnet.
Die Berechnung erfolgt durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{3}x$$



Mit dem GTR ergibt sich $x = -5$ oder $x = 0$ oder $x = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$

1. Lösungsmöglichkeit:

Berechnung der linken Fläche:

$$A_1 = \int_{-5}^0 \left(\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{2}x - \left(\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{3}x \right) \right) dx = \int_{-5}^0 \left(\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{15}x^2 - \frac{13}{6}x \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{45}x^3 - \frac{13}{12}x^2 \right]_{-5}^0 = 0 - \left(\frac{1}{40} \cdot 625 - \frac{1}{45} \cdot 125 - \frac{13}{12} \cdot 25 \right) = \frac{1025}{72} \approx 14,24$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{13}{3}} \left(\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{3}x - \left(\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{2}x \right) \right) dx = \int_0^{\frac{13}{3}} \left(-\frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + \frac{13}{6}x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{45}x^3 + \frac{13}{12}x^2 \right]_0^{\frac{13}{3}} = \frac{94471}{9720} \approx 9,72$$

Die Flächendifferenz beträgt $A_{\text{diff}} = \frac{1025}{72} - \frac{94471}{9720} = \frac{5488}{1215} \approx 4,52 \text{ FE.}$

2. Lösungsmöglichkeit:

Da nur nach der Flächendifferenz gefragt wird und nicht die Flächeninhalte getrennt angegeben werden müssen, kann auch über das Intervall $[-5; \frac{13}{3}]$ integriert werden:

$$A_{\text{diff}} = \left| \int_{-5}^{\frac{13}{3}} (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{45}x^3 - \frac{13}{12}x^2 \right]_{-5}^{\frac{13}{3}} \right| = \frac{5488}{1215} \approx 4,52$$

3. Lösungsmöglichkeit:
Mit dem GTR ergibt sich direkt:

```

P1ot1 P1ot2 P1ot3
\Y1=1/10*X^3+1/5
*X^2-3/2*X
\Y2=2/15*X^2+2/3
*X
\Y3=
\Y4=
\Y5=
    
```

```

fnInt(Y1-Y2,X,-5
,13/3)
4.516872428
    
```

1.3

Die Tangente, die parallel zu g ist, besitzt die gleiche Steigung wie g, also $m = -\frac{3}{2}$.

Gesucht ist der Berührungspunkt der Tangente an das Schaubild K_1 :

Es muss gelten: $f'_1(x) = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}x = 0 \quad | \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x + 4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = -\frac{4}{3}$$

Nun muss geprüft werden, für welche der beiden möglichen Berührstellen die folgende senkrechte Schnittbedingung erfüllt ist:

$$m_{\text{tangente}} \cdot f'_2(x) = -1 \quad \text{mit} \quad f'_2(x) = \frac{4}{15}x + \frac{2}{3}$$

$$\text{Prüfung für } x = 0: -\frac{3}{2} \cdot f'_2(0) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1 \quad \text{ist erfüllt.}$$

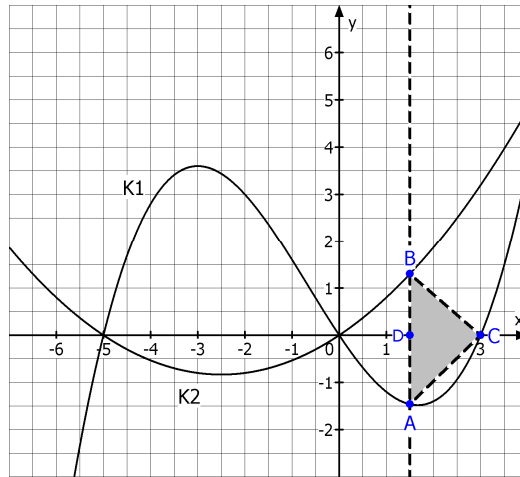
$$\text{Prüfung für } x = -\frac{4}{3}: -\frac{3}{2} \cdot f'_2\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{15} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3}\right) \neq -1 \quad \text{also nicht erfüllt.}$$

Damit lautet der Berührungspunkt $B(0/f_1(0)) = B(0/0)$.

Die Tangentengleichung ergibt sich aus der Punkt-Steigungsform:

$$y - 0 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$$

1.4



Die Fläche A des Dreiecks ABC berechnet sich als $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DC}$.

Die Punkte haben folgende Koordinaten:

$A(u/f_1(u))$, $B(u/f_2(u))$, $C(3/0)$, $D(u/0)$

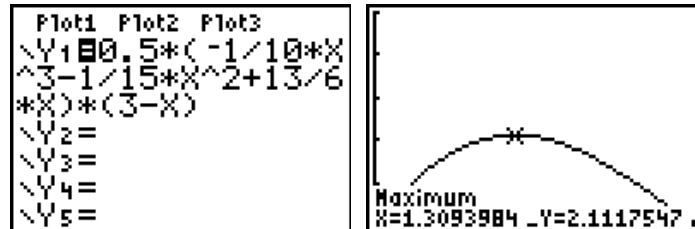
Daraus folgt: $\overline{AB} = f_2(u) - f_1(u)$ und $\overline{DC} = 3 - u$.

Für die Dreiecksfläche gilt nun $A = \frac{1}{2} \cdot (f_2(u) - f_1(u)) \cdot (3 - u)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{15}u^2 + \frac{2}{3}u - \left(\frac{1}{10}u^3 + \frac{1}{5}u^2 - \frac{3}{2}u \right) \right) \cdot (3 - u) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10}u^3 - \frac{1}{15}u^2 + \frac{13}{6}u \right) (3 - u), \quad 0 < u < 3$$

Für $u = 1,5$ gilt: $A(1,5) = 2,07$ FE.

Die maximal mögliche Fläche des Dreiecks wird mit dem GTR ermittelt.



Die Dreiecksfläche wird maximal für $u = 1,31$ und der maximale Flächeninhalt beträgt $A = 2,11$. Da 2,11 größer ist als die Fläche für $u = 1,5$, ist der Beweis erbracht.

1.5

Die Funktion $h(x)$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$.

Eine Extremstelle liegt bei $h(x)$ vor, wenn bei $f(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (=einfache Nullstelle) vorliegt.

Die einfachen Nullstellen von $f(x)$ sind bei $x_1 = 0$ oder $x_2 = 3$ oder $x_3 = -5$ (siehe 1.1).

An diesen Stellen besitzt das Schaubild von h Extremstellen.

Eine Wendestelle liegt bei $h(x)$ vor, wenn bei $f(x)$ eine Extremstelle vorliegt.

Die Extremstellen von $f(x)$ sind bei $x_1 = \frac{5}{3}$ oder $x_2 = -3$.

An diesen Stellen besitzt das Schaubild von h Wendestellen.