

Hauptprüfung 2003 Aufgabe 2

2.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

Berechnen Sie die Schnittpunkte von K_f mit den Koordinatenachsen (exakte Werte verlangt). Weisen Sie nach, dass K_f keine Hochpunkte, keine Tiefpunkte und keine Wendepunkte hat.

Zeichnen Sie K_f für $-3 \leq x \leq 3$.

Zeigen Sie: K_f und die Gerade mit der Gleichung $y = 4,5$ haben keine gemeinsamen Punkte. (9 Punkte)

2.2

Geben Sie eine Stammfunktion für f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K_f und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird. (4 Punkte)

2.3

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(0/4)$ und zeichnen Sie die Tangente ein.

Begründen Sie: Alle anderen Tangenten an das Schaubild K_f schneiden die y -Achse oberhalb von P . (6 Punkte)

2.4

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + bx^2 + cx + d$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild geht durch den Punkt $Q(2/\frac{10}{3})$ und schneidet K_f auf der y -Achse rechtwinklig. Berechnen Sie b , c und d . (5 Punkte)

2.5

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + k$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_h .

Zeigen Sie: Der x -Wert des Wendepunktes von K_h hängt nicht von der Zahl k ab.

Berechnen Sie die Zahl k so, dass der Wendepunkt von K_h auf der x -Achse liegt. (6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 2

2.1

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt mit der x-Achse: Setze $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 9 \Leftrightarrow -x = \ln 9 \Leftrightarrow x = -\ln 9$$

Als Schnittpunkt ergibt sich $N(-\ln 9 / 0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}e^0 = 4$ also $S_y(0/4)$.

Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$$

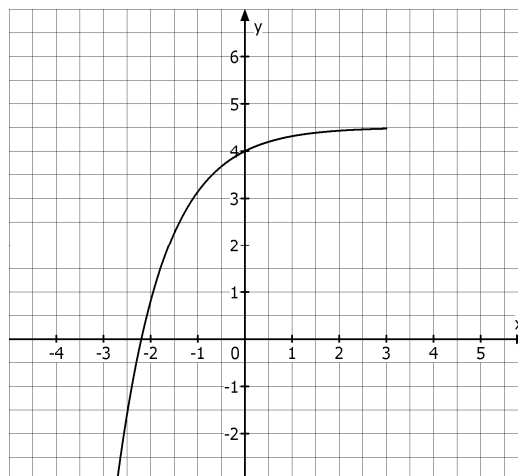
Diese Gleichung ist nicht lösbar, daher existieren auch keine Extrempunkte.

Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar, daher existieren auch keine Wendepunkte.



Schnitt mit der Geraden $y = 4,5$:

Gleichsetzen der Funktionen ergibt $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} = 4,5 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$

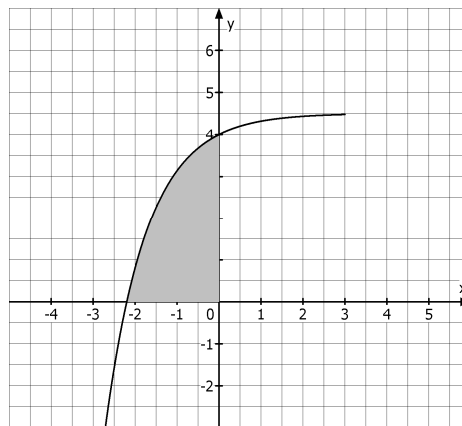
Da diese Gleichung nicht lösbar ist, existieren auch keine Schnittpunkte.

2.2

Stammfunktion F von f:

$$F(x) = \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x} \cdot \frac{1}{-1} = \frac{9}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

Flächenberechnung:



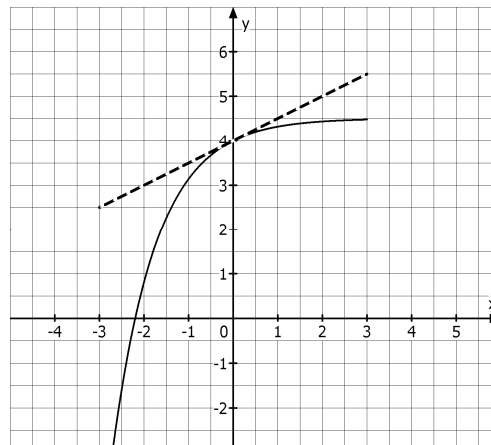
$$A = \int_{-\ln 9}^0 f(x) dx = \left[\frac{9}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x} \right]_{-\ln 9}^0 = 0 + \frac{1}{2}e^0 - \left(-\frac{9}{2}\ln 9 + \frac{1}{2}e^{\ln 9} \right) = \frac{9}{2}\ln 9 - 4 \approx 5,89 \text{ FE}$$

2.3

Gleichung der Tangente in $P(0/4)$:

$$\text{Tangentensteigung} = f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Punkt-Steigungsform: } y - 4 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$$



Alle anderen Tangenten an das Schaubild von f schneiden die y -Achse oberhalb von $P(0/4)$, da das Schaubild von f rechtsgekrümmt ist (wegen $f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} < 0$) und die

Tangentensteigungen alle positiv sind (wegen $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} > 0$).

2.4

Funktionsansatz: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + bx^2 + cx + d$ und $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2bx + c$

Folgende Bedingungen ergeben sich aus der Aufgabenstellung:

$$Q(2/\frac{10}{3}) \text{ liegt auf dem Schaubild: } g(2) = \frac{10}{3} \Rightarrow 2 + 4b + 2c + d = \frac{10}{3} \quad (1)$$

$$S_y(0/4) \text{ liegt auf dem Schaubild: } g(0) = 4 \Rightarrow d = 4 \quad (2)$$

$$\text{Rechtwinkliger Schnitt in } S_y: f'(0) \cdot g'(0) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot c = -1 \Rightarrow c = -2 \quad (3)$$

(2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt $b = \frac{1}{3}$.

Die Funktionsgleichung lautet $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$.

2.5

Ableitungen:

$$h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x + k$$

$$h'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - 2 \quad \text{und} \quad h''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad h'''(x) = \frac{3}{2}.$$

Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $h''(x) = 0$ und $h'''(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

$$h'''(-\frac{4}{9}) = \frac{3}{2} \neq 0 \quad \text{also existiert ein Wendepunkt } W(-\frac{4}{9} / h(-\frac{4}{9}))$$

$$h(-\frac{4}{9}) = \frac{680}{729} + k \quad \text{und damit } W(-\frac{4}{9} / \frac{680}{729} + k)$$

Der x -Wert ist somit unabhängig von k , wie zu zeigen war.

Damit der Wendepunkt auf der x -Achse liegt, muss der y -Wert Null ergeben:

$$\frac{680}{729} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{680}{729}$$

Für $k = -\frac{680}{729}$ liegt der Wendepunkt auf der x -Achse.