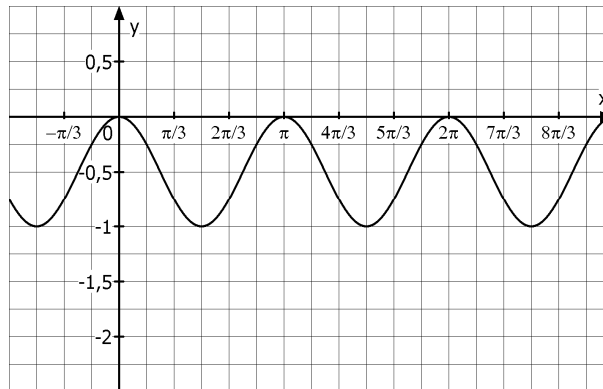


Hauptprüfung 2003 Aufgabe 3

3.1

Die gezeichnete Kurve ist das Schaubild einer Funktion mit der Gleichung $y = a + b \cdot \cos(kx)$



Ermitteln Sie an Hand der Zeichnung die Werte von a , b und k .
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(6 Punkte)

3.2

Gegeben sind die Funktionen f und g mit
 $f(x) = -0,5 \sin(2x)$ und $g(x) = \cos(x)$; $x \in [-2; 2]$.

Ihre Schaubilder sind K_f und K_g .

Untersuchen Sie das Schaubild K_f auf Schnittpunkte mit der x -Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichnen Sie K_f und K_g in ein Koordinatensystem.

(9 Punkte)

3.3

Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Schaubilder K_f und K_g im Punkt $P(\frac{\pi}{2}/0)$ senkrecht schneiden.

(4 Punkte)

3.4

Die y -Achse, K_f und K_g begrenzen für $x \geq 0$ eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

(5 Punkte)

3.5

Die Gerade mit der Gleichung $x = a$ für $0 < a < \frac{\pi}{2}$ schneidet die x -Achse im Punkt A und K_g im Punkt B .

Die Gerade mit der Gleichung $x = -a$ schneidet K_g im Punkt C und die x -Achse im Punkt D .

Berechnen Sie für einen Wert von a nach Ihrer Wahl den Umfang des Rechtecks $ABCD$.

Gibt es einen Wert für a , für den der Umfang des Rechtecks maximiert wird?

Begründen Sie Ihre Antwort.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 3

3.1

Die Parameter im Funktionsansatz $y = a + b \cdot \cos(kx)$ haben folgende Bedeutung:

a: Verschiebung des Schaubildes nach oben bzw. nach unten

Gegenüber der Funktion $y = \cos(x)$ ist das Schaubild um 0,5 nach unten verschoben (Höhe der „Mittellinie“ des Schaubildes) und damit gilt $a = -0,5$.

b: Amplitude des Schaubildes

Die Amplitude (Abstand der Mittellinie vom Hochpunkt bzw. Tiefpunkt) ist hier $b = 0,5$.

k: Der Parameter k beeinflusst die Periode.

$$\text{Es gilt } p = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{p}$$

Die Periode des Schaubildes ist $p = \pi$ und damit $k = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Die Funktionsgleichung lautet $y = -0,5 + 0,5 \cdot \cos(2x)$.

3.2

Schnittpunkte des Schaubildes von f mit der x-Achse:

$$\text{Ansatz: } f(x) = 0$$

$$\Rightarrow -0,5 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$$

Als Lösung der Gleichung folgt $2x = -\pi$ oder $2x = 0$ oder $2x = \pi$

$$\text{Daraus ergibt sich } x_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ oder } x_2 = 0 \text{ oder } x_3 = \frac{\pi}{2}$$

Als Nullstellen ergeben sich $N_1(-\frac{\pi}{2}/0)$, $N_2(0/0)$, $N_3(\frac{\pi}{2}/0)$.

Ableitungen:

$$f(x) = -0,5 \sin(2x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -0,5 \cos(2x) \cdot 2 = -\cos(2x) \text{ und } f''(x) = 2 \cdot \sin(2x) \text{ und } f'''(x) = 4 \cdot \cos(2x)$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow -\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$$

Als Lösung der Gleichung folgt $2x = -\frac{\pi}{2}$ oder $2x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Daraus ergibt sich } x_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ oder } x_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$f''(-\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow H(-\frac{\pi}{4} / f(-\frac{\pi}{4}))$$

$$\text{Aus } f(-\frac{\pi}{4}) = -0,5 \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0,5 \text{ folgt } H(-\frac{\pi}{4} / 0,5).$$

$$f''(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow T(\frac{\pi}{4} / f(\frac{\pi}{4}))$$

$$\text{Aus } f(\frac{\pi}{4}) = -0,5 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = -0,5 \text{ folgt } T(\frac{\pi}{4} / -0,5).$$

Wendepunkte:

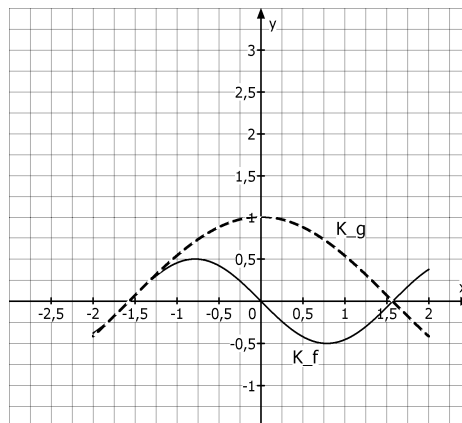
Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
 $\Rightarrow 2 \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$

Als Lösung der Gleichung folgt $2x = -\pi$ oder $2x = 0$ oder $2x = \pi$

$$\text{Daraus ergibt sich } x_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ oder } x_2 = 0 \text{ oder } x_3 = \frac{\pi}{2}$$

Da $f'''(-\frac{\pi}{2}) \neq 0$ bzw. $f'''(0) \neq 0$ bzw. $f'''(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ existieren an allen Stellen Wendepunkte.

Als Wendepunkte ergeben sich $W_1(-\frac{\pi}{2} / 0) = N_1$, $W_2(0 / 0) = N_2$, $W_3(\frac{\pi}{2} / 0) = N_3$.



3.3

Damit sich die Schaubilder senkrecht in P schneiden, müssen folgende Bedingungen gelten:

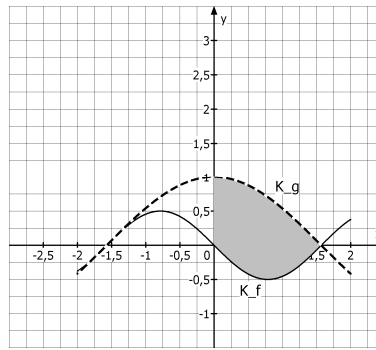
- P liegt auf beiden Schaubildern: $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2})$: Es gilt $f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$, also gültig !
- Senkrechter Schnitt: $f'(\frac{\pi}{2}) \cdot g'(\frac{\pi}{2}) = -1$

$$\text{Es gilt } f'(\frac{\pi}{2}) = -\cos(\pi) = 1 \text{ und mit } g'(x) = -\sin(x) \text{ folgt } g'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$\text{Daraus folgt } f'(\frac{\pi}{2}) \cdot g'(\frac{\pi}{2}) = 1 \cdot (-1) = -1, \text{ also gültig !}$$

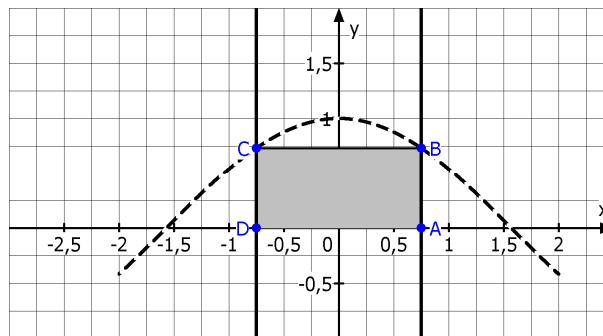
Damit ist der senkrechte Schnitt in P bewiesen.

3.4



$$\begin{aligned}
 \text{Fläche } A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x) - (-0,5 \cdot \sin(2x))) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x) + 0,5 \sin(2x)) dx \\
 &= \left[\sin(x) - \frac{0,5}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{4} \cos(\pi) - \left(0 - \frac{1}{4} \cos(0) \right) = 1,5 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

3.5



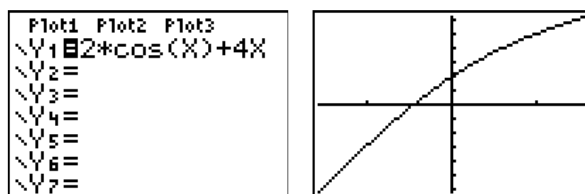
Der Umfang des Rechtecks berechnet sich mit $U = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CB}$

Die Koordinaten der Eckpunkte lauten $A(a/0)$, $B(a/g(a))$, $C(-a/g(a))$ und $D(-a/0)$.
Daraus folgt $\overline{AB} = g(a) - 0 = g(a)$ und $\overline{CB} = a - (-a) = 2a$.

Die Zielfunktion lautet nun $U(a) = 2 \cdot g(a) + 4a = 2 \cdot \cos(a) + 4a$ mit $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Zum Beispiel für $a = 0,75$ folgt $U(0,75) = 2 \cdot \cos(0,75) + 4 \cdot 0,75 = 4,463$

Mit Hilfe des GTR wird nun der Wert von a ermittelt, für den der Umfang maximal wird:



Das Schaubild von $U(a)$ besitzt ein Maximum am Rand bei $a = \frac{\pi}{2}$. Da für $a = \frac{\pi}{2}$ das

Rechteck zu einer Strecke ausartet (und der Randwert selbst gar nicht von a angenommen werden darf) gibt es keinen Wert von a , für das ein Rechteck mit maximalem Umfang entsteht.