

Hauptprüfung 2003 Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(3/-2/-1)$, $B(0/3/-1)$, $C(3/3/-1)$, $D(3/3/4)$ und $E(3/t/-1)$ sowie die

$$\text{Gerade h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

4.1

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B. (2 Punkte)

4.2

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel zueinander und verschieden sind. (3 Punkte)

4.3

Die Punkte A, B und E bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie t so, dass das Dreieck in E rechtwinklig ist.

Zeichnen Sie die Geraden g und h sowie das Dreieck ABC in ein räumliches Koordinatensystem (x_2 - und x_3 -Achse mit 1 LE = 1 cm; x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel

45° und 1 LE = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm). (6 Punkte)

4.4

Berechnen Sie die Innenwinkel und den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ABC. (4 Punkte)

4.5

Bestimmen Sie die Koordinaten von C' als orthogonale Projektion von C auf die $x_1 - x_2$ -Ebene und zeigen Sie, dass C' auf der Geraden durch C und D liegt. (3 Punkte)

4.6

Zeigen Sie, dass der Punkt $A^*(3/-1/0)$ Spurpunkt der Geraden durch D und A und der Punkt $B^*(0,6/3/0)$ Spurpunkt der Geraden D und B ist.

Zeichnen Sie die Punkte und das entstehende Dreieck A^*B^*C' in das Koordinatensystem aus 4.3 ein. (6 Punkte)

4.7

Weisen Sie nach, dass das Dreieck A^*B^*C' rechtwinklig ist und berechnen Sie seinen Flächeninhalt A_2 . Bestimmen Sie das Verhältnis $A_1 : A_2$. (4 Punkte)

4.8

Das Dreieck ABC bildet mit dem Punkt D eine Pyramide. Berechnen Sie ihr Volumen. (2 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 4

4.1

Gleichung der Gerade g durch A(3/-2/-1) und B(0/3/-1): $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.2

Die Geraden g und h sind parallel, da ihre Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ identisch sind.

(Es hätte auch ausgereicht, wenn die Vektoren Vielfache zueinander sind).

Um zu prüfen, dass die Geraden zueinander echt parallel und nicht identisch sind, wird geprüft, ob der Punkt A(3/-2/-1) von g auch auf h liegt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile folgt $3 = 3 - 3r \Rightarrow r = 0$

Aus der 2. Zeile folgt $-2 = -0,75 + 5r \Rightarrow r = -0,25$

Dies führt zu einem Widerspruch, somit liegt der Punkt A nicht auf der Gerade h.

Damit sind die Geraden g und h zueinander echt parallel.

4.3

Das Dreieck ABE ist in E rechtwinklig, wenn die Vektoren $\vec{AE} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ t+2 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

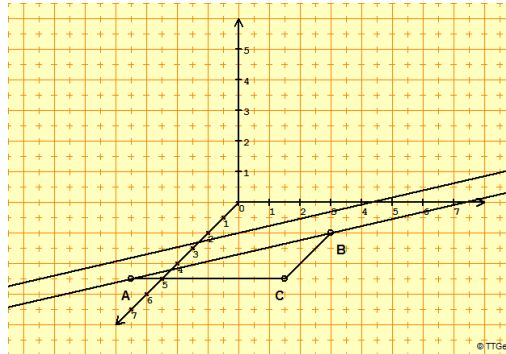
$$\vec{BE} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ t-3 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ t-3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ senkrecht aufeinander stehen.}$$

$$\text{Dies ist dann der Fall, wenn } \vec{AE} \cdot \vec{BE} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ t+2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ t-3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-3) = 0$$

Diese Gleichung besitzt nach dem Satz vom Nullprodukt die Lösungen $t = -2$ oder $t = 3$.

Für $t = -2$ gilt E(3/-2/-1). Da dies dem Punkt A entspricht, kommt diese Lösung nicht in Frage, da dann kein Dreieck entsteht.

Für $t = 3$ gilt E(3/3/-1) (dies entspricht dem Punkt C) und das Dreieck AEB ist rechtwinklig.



4.4

Aus 4.3 ist bekannt, dass das Dreieck ABC rechtwinklig im Punkt C ist, also $\gamma = 90^\circ$

$$\text{Für den Innenwinkel } \alpha \text{ gilt: } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{25}} \Rightarrow \alpha = 30,96^\circ$$

Für den Innenwinkel β gilt: $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 30,96^\circ = 59,04^\circ$.

$$\text{Dreiecksfläche: } A_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5 \text{ FE}$$

4.5

Die orthogonale Projektion von C ergibt C'(3/3/0) (x_3 -Wert wird 0 gesetzt).

$$\text{Die Gerade durch C und D besitzt die Gleichung } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Die Punktprobe mit C' ergibt } \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Zeile folgt $r = 0,2$ und die ersten beiden Zeilen sind für $r = 0,2$ auch gültig. Damit liegt C' auf der Geraden durch C und D.

4.6

$$\text{Die Gerade durch D und A besitzt die Gleichung } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Spurpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene ergibt sich durch die Bedingung $x_3 = 0$.

$$\Rightarrow 4 + 5r = 0 \Rightarrow r = -0,8$$

$$\text{Aus der 1. Zeile: } x_1 = 3$$

$$\text{Aus der 2. Zeile: } x_2 = 3 + 5 \cdot (-0,8) = -1$$

Daraus folgt als Spurpunkt A*(3/-1/0).

Die Gerade durch D und B besitzt die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

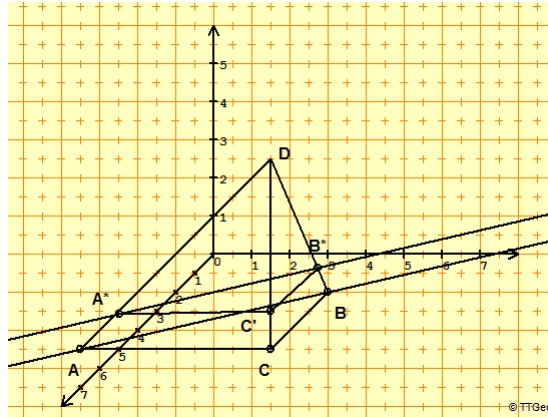
Der Spurpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene ergibt sich durch die Bedingung $x_3 = 0$.

$$\Rightarrow 4 + 5r = 0 \Rightarrow r = -0,8$$

$$\text{Aus der 1. Zeile: } x_1 = 3 + 3 \cdot (-0,8) = 0,6$$

$$\text{Aus der 2. Zeile: } x_2 = 3$$

Daraus folgt als Spurpunkt $B^*(0,6/3/0)$.



4.7

Laut Zeichnung liegt ein möglicher rechter Winkel beim Punkt C' vor.

Rechnerischer Nachweis: Es muss gelten $\overrightarrow{A^*C'} \cdot \overrightarrow{C'B^*} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ und damit ist gezeigt, dass bei C' ein rechter Winkel vorliegt.}$$

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks: } A_2 = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{A^*C'}| \cdot |\overrightarrow{C'B^*}| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,4 = 4,8 \text{ FE.}$$

$$\text{Es gilt } A_1 : A_2 = 7,5 : 4,8 = 25 : 16$$

4.8

Für das Pyramidenvolumen gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h_p$.

$$\text{Es gilt } A_{\Delta ABC} = A_1 = 7,5.$$

$$\text{Außerdem gilt } h_p = \overline{CD} = 5$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 5 = 12,5 \text{ VE.}$$