

Hauptprüfung 2003 Aufgabe 5

5.1

Berechnen Sie den allgemeinen Lösungsvektor des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = -2 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 21 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 23 \end{array}$$

(6 Punkte)

5.2

Geben Sie den Lösungsvektor an, dessen zweite Komponente gleich 5 ist.

Für welchen Lösungsvektor ist die Summe der Komponenten gleich 10 ? (4 Punkte)

5.3

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie die Matrixgleichung $A^2X = 2X - B$ nach X auf und berechnen Sie X .

(3 Punkte)

5.4.1

Drei Produktionsstätten P_1 , P_2 und P_3 sind nach dem Leontief-Modell verflochten. Sie beliefern sich und den Markt im derzeitigen Produktionszeitraum nach folgender Input-Output-Tabelle:

	P_1	P_2	P_3	Markt	Gesamtproduktion
P_1	x_{11}	78	26	40	160
P_2	0	x_{22}	52	130	260
P_3	64	0	x_{33}	40	130

Berechnen Sie die Eigenverbrauchsmengen und die Technologiematrix. (4 Punkte)

5.4.2

Die Marktabgabe hatte im vergangenen Produktionszeitraum 55 Einheiten bei P_1 , 100 Einheiten bei P_2 und 20 Einheiten bei P_3 betragen.

Berechnen Sie den zugehörigen Gesamtproduktionsvektor und die Input-Output-Tabelle.

(4 Punkte)

5.4.3

Meinungsumfragen haben ergeben, dass die Nachfrage nach den Gütern der Werke P_1 und P_3 nun gegenüber 5.4.1 unverändert bleibt, die Nachfrage nach den Gütern des Werkes P_2 aber steigt. Werk P_2 produziert daher ab sofort 80 ME mehr. Um wie viele ME müssen die Werke P_1 und P_3 ihre Produktion steigern und um wie viel erhöht sich die Marktabgabe von P_2 ?

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 5

5.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 21 \\ 2 & 3 & 1 & 23 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot (-3) \quad \boxed{} \\ \leftarrow \quad \boxed{} \\ | \cdot (-2) \quad \boxed{} \\ \leftarrow \quad \boxed{} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 27 \\ 0 & 7 & -1 & 27 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad \boxed{} \\ \leftarrow \quad \boxed{} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile liefert eine wahre Aussage $0 = 0$ und kann gestrichen werden.

Es ergeben sich unendlich dadurch unendlich viele Lösungen.

Es sei $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aus der 2. Zeile folgt $7t - x_3 = 27 \Rightarrow x_3 = 7t - 27$

Aus der 1. Zeile folgt $x_1 - 2t + 7t - 27 = -2 \Rightarrow x_1 = 25 - 5t$

Der allgemeine Lösungsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 25 - 5t \\ t \\ 7t - 27 \end{pmatrix}$.

5.2

Es soll $x_2 = 5$ gelten und damit $t = 5$.

Daraus folgt $x_1 = 25 - 5 \cdot 5 = 0$ und $x_3 = 35 - 27 = 8$ und damit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

5.3

$$A^2 X = 2X - B \Leftrightarrow A^2 X - 2X = -B \Leftrightarrow (A^2 - 2E) \cdot X = -B \quad | \cdot (A^2 - 2E)^{-1} \text{ von links}$$

$$X = -(A^2 - 2E)^{-1} \cdot B$$

Mit dem GTR ergibt sich $X = \begin{pmatrix} 21 & 15 \\ -13 & -9 \end{pmatrix}$.

5.4.1

Es ergibt sich :

$$x_{11} = 160 - 40 - 26 - 78 = 16 \quad \text{und} \quad x_{22} = 260 - 130 - 52 = 78 \quad \text{und} \quad x_{33} = 130 - 40 - 64 = 26$$

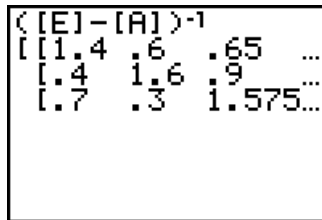
5.4.2

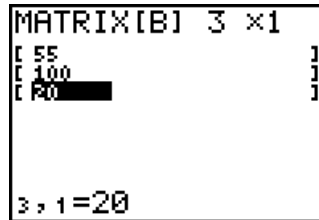
Für die Berechnung des Gesamtproduktionsvektors $\vec{x}$ wird zunächst die Technologiematrix A benötigt.

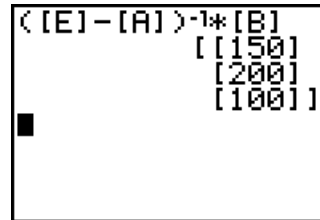
$$\text{Für die Matrix A gilt: } A = \begin{pmatrix} \frac{16}{160} & \frac{78}{260} & \frac{26}{130} \\ 0 & \frac{78}{260} & \frac{52}{130} \\ \frac{64}{160} & 0 & \frac{26}{130} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Marktabgabevektor } \vec{y} = \begin{pmatrix} 55 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Leontief-Gleichung: } \vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$$







$$\text{Mit dem GTR ergibt sich: } (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,6 & 0,65 \\ 0,4 & 1,6 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 & 1,575 \end{pmatrix} \text{ und damit } \vec{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Die neue Input-Output-Tabelle lautet:

	P ₁	P ₂	P ₃	Markt	Gesamtproduktion
P ₁	0,1 · 150 = 15	0,3 · 200 = 60	0,2 · 100 = 20	55	150
P ₂	0	0,3 · 200 = 60	0,4 · 100 = 40	100	200
P ₃	0,4 · 150 = 60	0	0,2 · 100 = 20	20	100

5.4.3

$$\text{Nun gilt für den Marktabgabevektor } \vec{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ y_2 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ und für den Produktionsvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 340 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Leontief-Gleichung: } \vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 340 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,6 & 0,65 \\ 0,4 & 1,6 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 & 1,575 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ y_2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Aus 2. Zeile: $340 = 16 + 16y_2 + 36 \Leftrightarrow y_2 = 180$

Aus 1. Zeile: $x_1 = 56 + 108 + 26 = 190$

Aus 3. Zeile: $x_3 = 28 + 54 + 63 = 145$

P_1 muss seine Produktion um $190 - 160 = 30$ Einheiten steigern.

P_3 muss seine Produktion um $145 - 130 = 15$ Einheiten steigern.

P_2 erhöht die Marktabgabe um $180 - 130 = 50$ Einheiten.