

Hauptprüfung 2003 Aufgabe 6

An einem Lotteriestand werden Rubbelkarten angeboten. Von den 9 Feldern einer Karte tragen drei den Auszahlungsbetrag 1 € und zwei den Auszahlungsbetrag 5 €. Die restlichen vier Felder sind Leerfelder.

5€		
	1€	5€
1€		1€

Die Lage der einzelnen Felder ist zufällig.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein mögliches Beispiel.

Jedes Feld ist mit einer undurchsichtigen Deckschicht überzogen, die man mit einer Münze entfernen kann.

Ein Spiel ist wie folgt definiert: Nach dem Kauf einer Rubbelkarte muss der Käufer genau zwei Felder aufrubbeln, d.h. die Deckschicht dieser beiden Felder entfernen, so dass der Inhalt dieser Felder sichtbar wird.

6.1

Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm für ein Spiel mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Beide Felder sind leer.

B: Beide Felder zeigen einen Geldbetrag an.

C: Höchstens ein Feld zeigt einen Geldbetrag an.

D: Beide Felder zusammen zeigen einen Betrag von mindestens 6 € an.

(9 Punkte)

6.2

Eine Rubbelkarte kostet 3€. Es werden Geldbeträge der aufgerubbelten Felder ausgezahlt. Für Leerfelder gibt es nichts.

Erstellen Sie eine Tabelle für alle möglichen Auszahlungsbeträge.

Welchen Gewinn kann der Betreiber im Durchschnitt bei 10 Spielen erwarten ?

Wie viele Rubbelkarten müssen täglich verkauft werden, damit der Betreiber in 7 Tagen mindestens 300 Euro Gewinn erzielt ?

(8 Punkte)

6.3

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbleibt dem Käufer in einem Spiel ein Gewinn ?

Ein Spieler kauft 60 Rubbelkarten; bei wie vielen Spielen kann er einen Gewinn erwarten ?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Aufrubbeln von 3 Karten mindestens einmal ein Gewinn verbleibt ?

(7 Punkte)

6.4

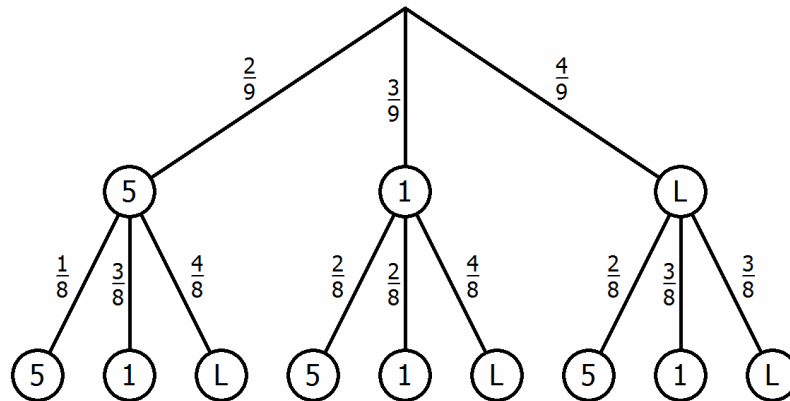
Wie muss der Auszahlungsbetrag für jedes 5 € - Feld abgeändert werden, so dass bei einem unveränderten Preis von 3 € pro Rubbelkarte das Spiel fair wird ?

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 6

6.1



$$P(A) = P(LL) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = P(15) + P(51) + P(11) + P(55) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{18}$$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

$$P(D) = P(15) + P(51) + P(55) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{36}$$

6.2

Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag in €.

$$P(X=0) = P(LL) = \frac{1}{6} \quad P(X=1) = P(1L) + P(L1) = \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = P(11) = \frac{1}{12} \quad P(X=5) = P(L5) + P(5L) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot 2 = \frac{2}{9}$$

$$P(X=6) = P(51) + P(15) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{1}{6} \quad P(X=10) = P(55) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$$

X	0	1	2	5	6	10
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{Erwartungswert } E(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{2}{9} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{36} = \frac{26}{9} \text{ €}$$

$$\text{Der erwartete Auszahlungsbetrag bei 10 Spielen beträgt } 10 \cdot \frac{26}{9} = \frac{260}{9} \text{ €} = 28,89 \text{ €}$$

$$\text{Gewinn bei 10 Spielen: } 30 \text{ €} - 28,89 \text{ €} = 1,11 \text{ €}$$

Der Betreiber kann im Durchschnitt bei 10 Spielen mit 1,11 € Gewinn rechnen.

Pro Spiel ergibt sich ein durchschnittlicher Gewinn von $3 - \frac{26}{9} = \frac{1}{9} \text{ €}$

Um einen Gewinn von 300 € zu erzielen, müssen $\frac{300}{\frac{1}{9}} = 2700$ Karten verkauft werden.

Bei 7 Tagen sind dies pro Tag mindestens $\frac{2700}{7} \approx 386$ Rubbelkarten

6.3

$$P(\text{Käufer macht Gewinn}) = P(\text{Auszahlung} > 3 \text{ €}) = P(X = 5) + P(X=6) + P(X=10) \\ = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$$

Beim Kauf von 60 Rubbelkarten kann er bei $60 \cdot \frac{5}{12} = 25$ Karten einen Gewinn erwarten.

Nun werden 3 Karten aufgerubbelt.

$P(\text{mindestens einmal ein Gewinn}) = 1 - P(\text{kein Gewinn bei 3 Karten})$

$$1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{1385}{1728} \approx 0,802$$

6.4

Der Auszahlungsbetrag für ein 5€-Feld sei nun a.

Die Tabelle aus 6.2 sieht nun so aus:

X	0	1	2	a	a+1	2a
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{12} + a \cdot \frac{2}{9} + (a+1) \cdot \frac{1}{6} + 2a \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a$$

Damit das Spiel fair ist, muss der erwartete Auszahlungsbetrag dem Einzahlungsbetrag

entsprechen: $E(X) = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a = 3 \Leftrightarrow a = 5,25 \text{ €}$

Der Auszahlungsbetrag muss auf 5,25 € erhöht werden, damit das Spiel fair wird.