

Hauptprüfung 2003 Aufgabe 7

7.1

Die Gesamtkosten für die Produktion einer Ware werden durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades bestimmt. Die Erlösfunktion ist linear. Die Nutzenschwelle liegt bei 2 ME (Mengeneinheiten). Die Gesamtkosten bei dieser Produktionsmenge betragen 150 GE (Geldeinheiten). Die Differentialkosten sind durch die Gleichung $K'(x) = 24x^2 - 98x + 100$ gegeben. Berechnen Sie die Funktionsterme für die Erlös- und die Gesamtkostenfunktion.

(3 Punkte)

7.2

Die Gesamtkostenfunktion K und die Erlösfunktion E sind gegeben durch

$$K(x) = 8x^3 - 49x^2 + 100x + 82 \text{ und } E(x) = 75x.$$

Die Kapazitätsgrenze wird bei einer Produktionsmenge von 6 ME erreicht.

7.2.1

Berechnen Sie die Nutzenschwelle.

(3 Punkte)

7.2.2

Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

(4 Punkte)

7.3.1

Zeichnen Sie die Schaubilder der Gesamtkostenfunktion K und der Erlösfunktion E in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie grafisch das Betriebsoptimum.

(4 Punkte)

7.3.2

Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

(3 Punkte)

7.4.

Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

(4 Punkte)

7.5.1

Beschreiben Sie die Auswirkungen einer Preissenkung auf die Gewinnzone und den maximalen Gewinn, wenn der Kostenverlauf gleich bleibt.

(3 Punkte)

7.5.2

Wie weit müssten die Fixkosten gesenkt werden, um bei einem Verkaufspreis von 65 GE je ME die Nutzenschwelle weiter bei 2 ME halten zu können ?

(3 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2003 Aufgabe 7

7.1

Aufstellen der Erlösfunktion $E(x)$:

Für die lineare Erlösfunktion gilt der Ansatz $E(x) = p \cdot x$.

Da die Nutzenschwelle bei 2 ME liegt und die Gesamtkosten dort 150 GE betragen, muss gelten: $E(2) = 150 \Rightarrow 2p = 150 \Rightarrow p = 75$.

Daraus folgt $E(x) = 75x$.

Aufstellen der Gesamtkostenfunktion $K(x)$:

Aus der gegebenen Ableitungsfunktion $K'(x) = 24x^2 - 98x + 100$ folgt

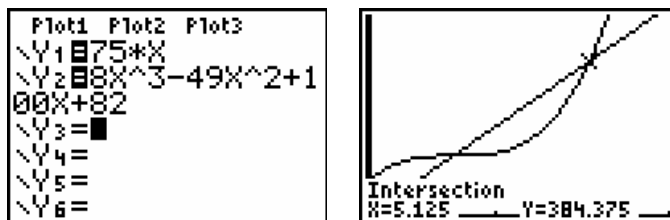
$$K(x) = 8x^3 - 49x^2 + 100x + C \quad (\text{Berechnung der Stammfunktion})$$

Außerdem gilt $K(2) = 150 \Rightarrow 64 - 196 + 200 + C = 150 \Rightarrow C = 82$.

Daraus folgt $K(x) = 8x^3 - 49x^2 + 100x + 82$

7.2.1

Die Nutzengrenze ergibt sich als rechter Schnittpunkt der Erlösfunktion mit der Kostenfunktion.



Die Nutzengrenze liegt bei $x = 5,125$ ME.

7.2.2

Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x) = E(x) - K(x) = 75x - (8x^3 - 49x^2 + 100x + 82) = -8x^3 + 49x^2 - 25x - 82$$

Der Gewinn ist maximal, wenn $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$ ist.

1. Lösungsmöglichkeit: ohne GTR

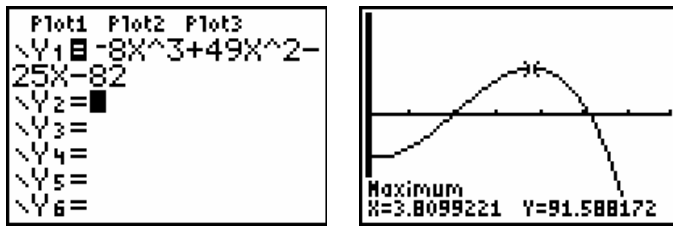
Es gilt $G'(x) = -24x^2 + 98x - 25$ und $G''(x) = -48x + 98$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -24x^2 + 98x - 25 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-98 \pm \sqrt{9604 - 2400}}{-48} \Rightarrow x_1 = 0,27 \text{ und } x_2 = 3,81$$

$G''(0,27) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum

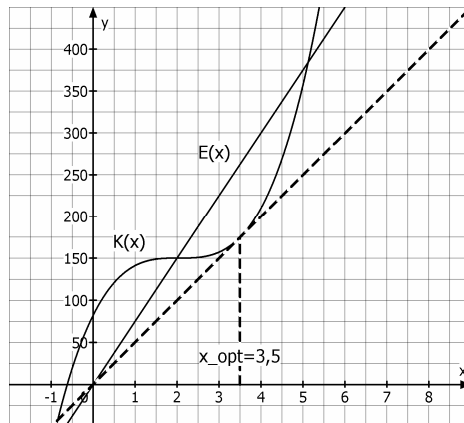
$G''(3,81) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum mit $G(3,81) = 91,59$ GE

2. Lösungsmöglichkeit: mit GTR



Gewinn wird für $x = 3,81$ maximal und maximaler Gewinn ist $G(3,81) = 91,59$ GE

7.3.1



Das Betriebsoptimum kann man grafisch dadurch bestimmen, dass man vom Ursprung aus eine Tangente (gestrichelte Gerade) an das Schaubild der Kostenfunktion legt. An der Stelle $x = 3,5$ berührt die Tangente die Kostenfunktion, somit liegt das Betriebsoptimum zeichnerisch abgelesen bei $x = 3,5$.

7.3.2

Die Bedingung für die langfristige Preisuntergrenze lautet $K'(x) = k(x)$
 (Differenzial-/Grenzkostenfunktion = Stückkostenfunktion)

$$\text{Es gilt } K'(x) = 24x^2 - 98x + 100 \text{ und } k(x) = \frac{K(x)}{x} = 8x^2 - 49x + 100 + \frac{82}{x}$$

$$\Rightarrow 24x^2 - 98x + 100 = 8x^2 - 49x + 100 + \frac{82}{x} \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow 24x^3 - 98x^2 + 100x = 8x^3 - 49x^2 + 100x + 82$$

$$\Rightarrow 16x^3 - 49x^2 - 82 = 0$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $x = 3,48$.

Es gilt $k(3,48) = 49,93$ GE.

Damit beträgt die langfristige Preisuntergrenze 49,93 GE.

7.4

Die Bedingung für das Betriebsminimum lautet $K'(x) = k_v(x)$
 (Differenzial-/Grenzkostenfunktion = variable Stückkostenfunktion)

Es gilt $K'(x) = 24x^2 - 98x + 100$ und $k_v(x) = 8x^2 - 49x + 100$

$$\Rightarrow 24x^2 - 98x + 100 = 8x^2 - 49x + 100$$

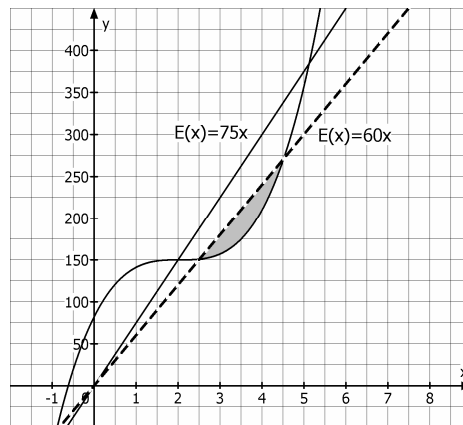
$$\Rightarrow 16x^2 - 49x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (16x - 49) = 0$$

Als Lösung ergibt sich $x = 0$ oder $x = \frac{49}{16}$ wobei $x = 0$ als Lösung ausscheidet.

Das Betriebsminimum liegt bei $x = \frac{49}{16}$.

Die kurzfristige Preisuntergrenze liegt bei $k_v\left(\frac{49}{16}\right) = 24,97$ GE.

7.5.1



Bei einer Senkung des Preises wird die Steigung der Erlösfunktion kleiner, das Schaubild der Erlösfunktion damit „flacher“. Im obigen Schaubild ist dies am Beispiel dargestellt, dass der Preis von 75 GE auf 60 GE gesenkt wird.

In der Auswirkung wird die Nutzenschwelle (linker Schnittpunkt der Erlösfunktion mit der Kostenfunktion) größer und die Nutzenschwelle (rechter Schnittpunkt der Erlösfunktion mit der Kostenfunktion) kleiner. Die Gewinnzone wird damit kleiner.

Da die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ kleiner wird, wenn sich $E(x)$ verkleinert, wird auch der maximale Gewinn bei einer Preissenkung geringer.

7.5.2

Der Preis sei 65 GE je ME und damit lautet die neue Erlösfunktion $E^*(x) = 65x$.

Die Fixkosten sollen abgesenkt werden, das heißt die Kostenfunktion lautet

$K^*(x) = 8x^3 - 49x^2 + 100x + C$ wobei die Fixkosten $K^*(0) = C$ betragen.

Nun soll gelten, dass die Nutzenschwelle weiterhin bei $x = 2$ ist, also $K^*(2) = E^*(2)$.

$$K^*(2) = 64 - 196 + 200 + C = 68 + C \quad \text{und} \quad E^*(2) = 130$$

$$\Rightarrow 68 + C = 130 \Rightarrow C = 62$$

Die neuen Fixkosten betragen 62 GE. Da die bisherigen Fixkosten $K(0) = 82$ GE betrugen, müssen die Fixkosten um 20 GE gesenkt werden.