

Hauptprüfung 2002 Aufgabe 1

1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 + 12x^2 + 36x - 16)$, $x \in \mathbb{R}$

Untersuchen Sie das Schaubild K_f von f auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichnen Sie K_f für $-8 \leq x \leq 1$ mit 1 LE = 1 cm.

(8 Punkte)

1.2

Begründen Sie, dass K_f die x -Achse nur einmal schneidet und dass die Schnittstelle im Intervall $[0;1]$ liegt.

(3 Punkte)

1.3

Das Schaubild K_f wird um 2 LE in y -Richtung nach unten verschoben. Zeigen Sie, dass das neue Schaubild nur zwei Punkte mit der x -Achse gemeinsam hat.

(4 Punkte)

1.4

Die Tangente im Punkt $A(-6/2)$ und das Schaubild K_f begrenzen eine Fläche.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. In welchem Verhältnis teilt die Parallele zur y -Achse durch den Punkt $B(-2/6)$ diese Fläche ?

(7 Punkte)

1.5

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $W(-4/4)$. Berechnen Sie die

Berührungspunkte aller Tangenten an K_f , die durch den Punkt $C(0/10)$ gehen.

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2002 Aufgabe 1

1.1

Ableitungsfunktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8}(x^3 + 12x^2 + 36x - 16) & f'(x) &= -\frac{1}{8}(3x^2 + 24x + 36) \\ f''(x) &= -\frac{1}{8}(6x + 24) & f'''(x) &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Hoch- und Tiefpunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$-\frac{1}{8}(3x^2 + 24x + 36) = 0 \quad | : (-\frac{1}{8})$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 24x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 3 \cdot 36}}{6} = \frac{-24 \pm 12}{6} \quad \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -6$$

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow \text{HP}(-2 / f(-2)) = \text{HP}(-2 / 6)$$

$$f''(-6) > 0 \Rightarrow \text{TP}(-6 / f(-6)) = \text{TP}(-6 / 2)$$

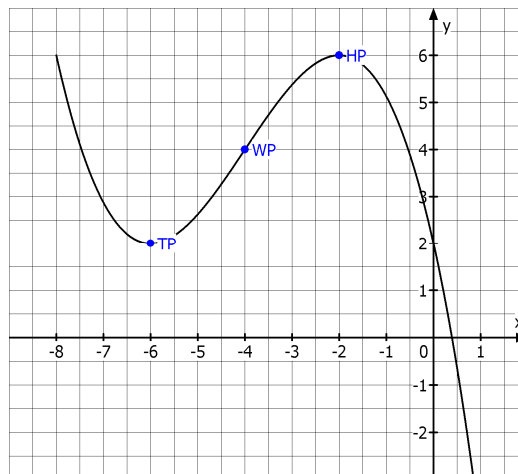
Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$-\frac{1}{8}(6x + 24) = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$f'''(-4) = -\frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{WP}(-4 / f(-4)) = \text{WP}(-4 / 4)$$

Schaubild:



1.2

Existenz der Schnittstelle:

Es gilt $f(0) = 2 > 0$ und $f(1) = -4,125 < 0$

Da im Intervall $[0;1]$ der Funktionswert (=der y-Wert) das Vorzeichen wechselt, muss in diesem Intervall die x-Achse geschnitten werden.

Eindeutigkeit der Schnittstelle:

Warum ist dies die einzige Schnittstelle mit der x-Achse ?

Für $x \rightarrow \infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$. Da für $x > 1$ kein Tiefpunkt existiert, in dem das Schaubild wieder nach oben umkehren könnte, gibt es für $x > 1$ keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow \infty$. Für $x < 0$ existieren zwei Extrempunkte, diese liegen aber beide oberhalb der x-Achse, so dass auch für $x < 0$ kein weiterer Schnittpunkt mit der x-Achse existiert.

1.3

Funktionsgleichung der verschobenen Funktion:

Funktionsgleichung der um 2 LE nach unten verschobenen Funktion $g(x)$:

$$g(x) = f(x) - 2 = -\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 2 - 2 = -\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x$$

Nullstellen von $g(x)$:

Bedingung: $g(x) = 0$

$$-\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$$

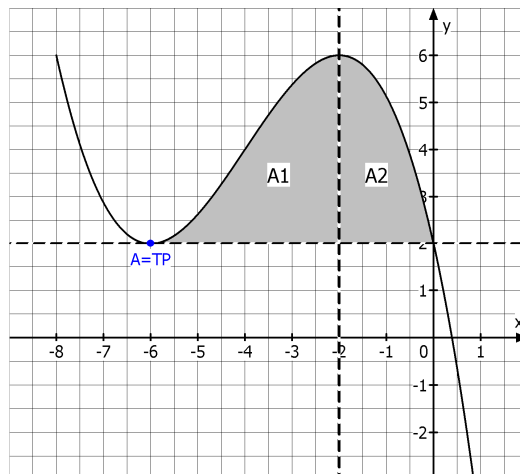
$$\Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)}}{-0,25} = \frac{1,5 \pm 0}{-0,25} = -6$$

Das Schaubild von g besitzt die Nullstellen $N_1(0/0)$ und $N_2(-6/0)$ und somit nur zwei gemeinsame Punkte mit der x-Achse.

1.4

Der Punkt $A(-6/2)$ entspricht dem Tiefpunkt des Schaubildes. Daher existiert im Punkt A eine waagrechte Tangente.

Die Tangentengleichung im Punkt A lautet $y = 2$.



Berechnung der Gesamtfläche:

$$A = \int_{-6}^0 (f(x) - 2) dx = \int_{-6}^0 \left(-\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x \right) dx = \left[-\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 \right]_{-6}^0$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{32}(-6)^4 - \frac{1}{2}(-6)^3 - \frac{9}{4}(-6)^2 \right) = 13,5 \text{ FE}$$

Berechnung der rechten Teilfläche:

$$A_2 = \int_{-2}^0 (f(x) - 2) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x \right) dx = \left[-\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 \right]_{-2}^0$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{32}(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^3 - \frac{9}{4}(-2)^2 \right) = 5,5$$

Berechnung der linken Teilfläche:

$$A_1 = A - A_2 = 13,5 - 5,5 = 8 \text{ FE}$$

$$\text{Flächenverhältnis: } A_1 : A_2 = \frac{8}{5,5} = \frac{16}{11}$$

1.5

Tangentengleichung im Punkt W(-4/4):

Berechnung der Tangentensteigung: $m = f'(-4) = 1,5$

Die Tangente enthält den Berührungspunkt W(-4/4).

$$\text{Punkt-Steigungsform: } \frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Leftrightarrow \frac{y - 4}{x - (-4)} = 1,5 \Leftrightarrow y - 4 = 1,5(x + 4) \Leftrightarrow y = 1,5x + 10$$

Die Tangentengleichung lautet $y = 1,5x + 10$.

Tangentengleichung, die durch C(0/10) verläuft:

Der (unbekannte) Berührungspunkt habe die allgemeinen Koordinaten B(u/f(u)).

Die Tangente im Berührungspunkt B hat die Steigung $m = f'(u)$.

$$\text{Punkt-Steigungsform: } \frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Leftrightarrow \frac{y - f(u)}{x - u} = f'(u) \Leftrightarrow y - f(u) = f'(u) \cdot (x - u)$$

$$\Rightarrow y - \left(-\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{9}{2}u + 2 \right) = \left(-\frac{3}{8}u^2 - 3u - \frac{9}{2} \right) \cdot (x - u)$$

Einsetzen des bekannten Tangentenpunktes C(0/10) ($x = 0, y = 10$) in die Gleichung:

$$10 - \left(-\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{9}{2}u + 2 \right) = \left(-\frac{3}{8}u^2 - 3u - \frac{9}{2} \right) \cdot (0 - u)$$

$$\Leftrightarrow 10 + \frac{1}{8}u^3 + \frac{3}{2}u^2 + \frac{9}{2}u - 2 = \frac{3}{8}u^3 + 3u^2 + \frac{9}{2}u \Leftrightarrow -\frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 8 = 0$$

Mit Hilfe des GTR ergeben sich die Lösungen $u = -4$ oder $u = 2$.

Die Berührungspunkte lauten daher $B_1(-4/f(-4)) = B_1(-4/4)$ und $B_2(2/f(2)) = B_2(2/-14)$