

Hauptprüfung 2002 Aufgabe 2

2.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$; $x \in \mathbb{R}$

Untersuchen Sie K_f auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichnen Sie K_f für $-2,5 \leq x \leq 2$ mit $1 \text{ LE} = 2 \text{ cm}$. (8 Punkte)

2.2

Zeigen Sie, dass die Gerade t mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 1$ eine Tangente an das

Schaubild K_f ist. Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein.

(4 Punkte)

2.3.

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 2 - e^{1,5x}$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_h .

Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder K_h und K_f auf der y -Achse berühren. Zeichnen Sie

K_h in das vorhandene Koordinatensystem ein. (7 Punkte)

2.4

Die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ und die Schaubilder K_f und K_h umschließen im ersten und vierten Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

(6 Punkte)

2.5

Können reelle Zahlen a und b so bestimmt werden dass die Kurve mit der Gleichung

$y = 2 - a \cdot e^{bx}$ durch die Punkte $P(-1/3)$ und $Q(1/0)$ geht ?

Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2002 Aufgabe 2

2.1

Schnittpunkte mit der x-Achse:

Bedingung: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \quad | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

Da hier kein x ausgeklammert werden kann muss bei dieser Gleichung eine Lösung durch systematisches Probieren bzw. mit Hilfe des GTR erraten werden und anschließend die Polynomdivision oder das Horner-Schema (je nachdem was im Unterricht behandelt wurde) angewandt werden:

Eine (erratene) Lösung lautet $x_1 = 1$.

Polynomdivision: $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 3x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -2x + 2 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Berechnung der weiteren Lösungen: } x^2 + x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ &\Rightarrow x_2 = 1 \text{ und } x_3 = -2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten $N_1(-2/0)$ und $N_2(1/0)$.

Alternativ können die Nullstellen auch mit Hilfe des GTR bestimmt werden.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 1 \Rightarrow S_y(0/1)$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 & f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\ f''(x) &= 3x & f'''(x) &= 3 \end{aligned}$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(-1) = -3 < 0 \Rightarrow \text{HP}(-1/f(-1)) = \text{HP}(-1/2)$$

$$f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow \text{TP}(1/f(1)) = \text{TP}(1/0) = N_2$$

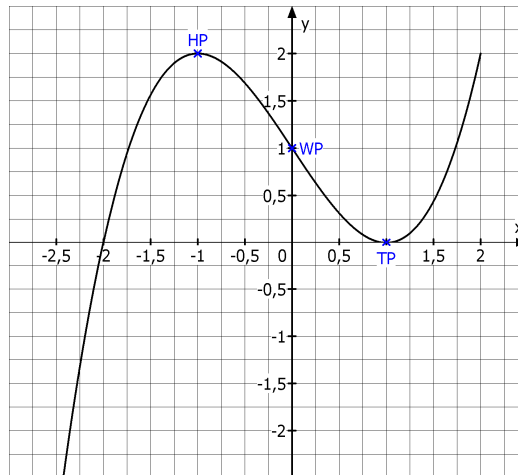
Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'''(0) = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}(0 / f(0)) = \text{WP}(0 / 1)$$

Schaubild:



2.2

Die Tangente besitzt die Steigung $m = -\frac{3}{2}$.

Für die unbekannte Stelle x des Berührungspunktes muss gelten: $f'(x) = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

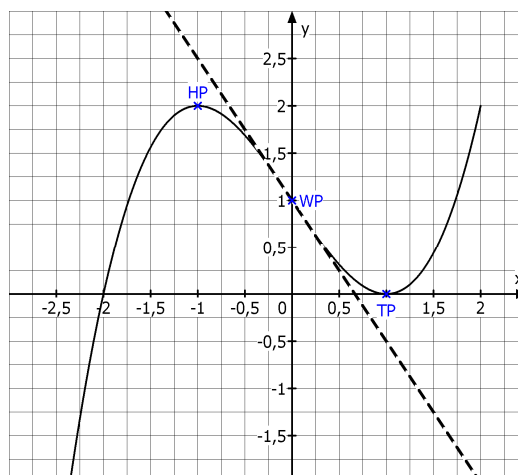
Es gilt $f(0) = 1$ und somit ist $B(0/1)$ der Punkt mit der Steigung $m = -\frac{3}{2}$.

Nun muss noch kontrolliert werden, ob der Punkt B auch auf der Tangente liegt:

Einsetzen der Koordinaten von B in die Tangentengleichung: $1 = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 1$ ist eine wahre

Aussage. Damit liegt B auch auf der Tangente.

Damit ist gezeigt, dass die Gerade t eine Tangente an das Schaubild ist.



2.3

Die Schaubilder K_h und K_f berühren sich an der Stelle $x = 0$ (auf der y-Achse), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

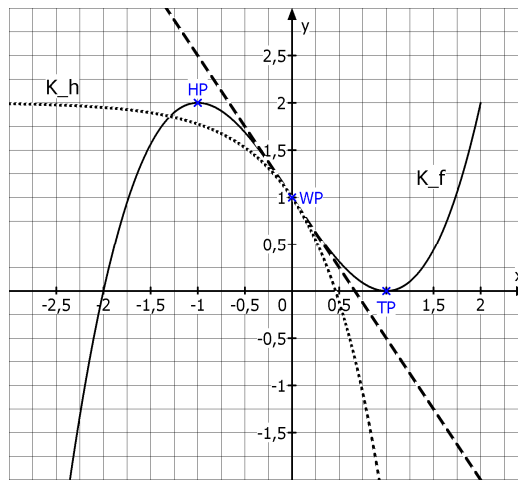
- $f(0) = h(0)$ (gemeinsamer Punkt)
- $f'(0) = h'(0)$ (gemeinsame Steigung)

Es gilt $h(0) = 2 - e^{15 \cdot 0} = 2 - 1 = 1$ und $f(0) = 1$, also ist die erste Bedingung erfüllt.

Mit $h'(x) = -15 \cdot e^{15x}$ gilt $h'(0) = -15$ und $f'(0) = -15$, also ist die zweite Bedingung erfüllt.

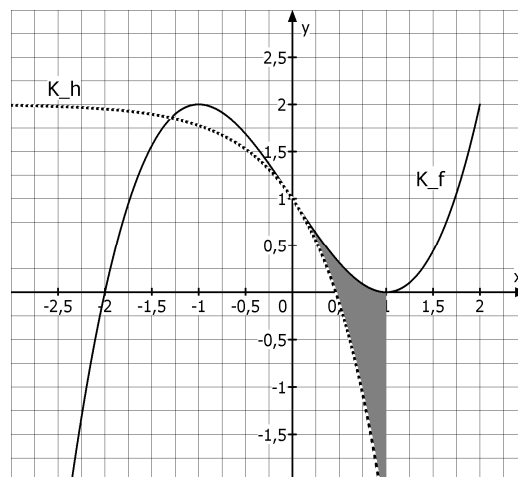
Damit ist die Berührung der Schaubilder gezeigt.

Schaubild:



2.4

Berechnung der Fläche:



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 (f(x) - h(x)) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 - (2 - e^{15x}) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x - 1 + e^{15x} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{1}{15}e^{15x} \right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{15}e^{15} - \left(0 + \frac{1}{15} \right) \approx 0,7 \text{ Flächeneinheiten}
 \end{aligned}$$

2.5

Die Punkte P(-1/3) und Q(1/0) sollen auf dem Schaubild liegen.
Einsetzen der Koordinaten in die Funktionsgleichung:

Punkt P: $3 = 2 - a \cdot e^{-b}$ (1)

Punkt Q: $0 = 2 - a \cdot e^b$ (2)

Auflösen von (1) nach a: $1 = -a \cdot e^{-b} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{e^{-b}} = -e^b$ (3)

Einsetzen von (3) in (2): $0 = 2 - (-e^b) \cdot e^b \Leftrightarrow 0 = 2 + e^{2b} \Leftrightarrow e^{2b} = -2$

Diese Gleichung ist nicht lösbar, da eine e-Funktion keine negativen Werte annehmen kann.

Daher gibt es keine reellen Zahlen a und b, so dass P und Q auf dem Schaubild liegen.