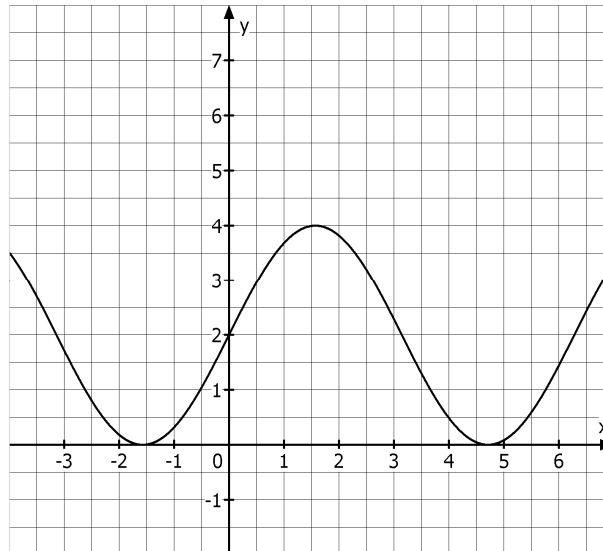


Hauptprüfung 2002 Aufgabe 3

3.1

Die gezeichnete Kurve ist das Schaubild einer Funktion mit der Gleichung $y = a + b \cdot \sin(x)$.



Ermitteln Sie die Werte a und b anhand des Schaubildes und begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte an.

(6 Punkte)

3.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - x + 2 \cdot \sin(x)$, $x \in [-2; 5]$. Ihr Schaubild ist K_f .

Untersuchen Sie das Schaubild K_f auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_f mit 1 LE = 1 cm.

(8 Punkte)

3.3

Berechnen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens die Nullstelle von f auf 3 Nachkommastellen gerundet.

(4 Punkte)

3.4

Zeigen Sie rechnerisch, dass die zweite Winkelhalbierende das Schaubild K_f in zwei Punkten berührt. Berechnen Sie den Inhalt der von K_f und der zweiten Winkelhalbierenden eingeschlossenen Fläche.

(4 Punkte)

3.5

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 2(\sin(x) + 1)$, $x \in [-2; 5]$. Ihr Schaubild ist K_g .

In den Kurvenpunkten $A(0/2)$ und $B(\pi/2)$ werden die Tangenten an K_g gelegt. Diese

Tangenten schneiden sich in einem Punkt C . Berechnen Sie die Koordinaten von C .

Weisen Sie nach, dass das Dreieck mit den Ecken A , B und C gleichschenkelig ist.

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2002 Aufgabe 3

3.1

Berechnung von a und b:

Der Punkt $S_y(0/2)$ liegt auf dem Schaubild, das heißt es gilt $f(0) = 2$.

Daraus folgt $2 = a + b \cdot \sin(0) \Rightarrow a = 2$

(Man könnte auch so argumentieren, dass a die Verschiebung der Sinuskurve nach oben/unten darstellt und das angegebene Schaubild gegenüber der Funktion $y = \sin(x)$ um $a = 2$ Einheiten nach oben verschoben ist. Das erkennt man daran, dass sich die „waagrechte Mittellinie“ des Schaubildes auf der Höhe 2 befindet).

Der Wert von b stellt die Amplitude der Sinusfunktion dar.

Die Amplitude ist der Abstand zwischen der „waagrechten Mittellinie“ des Schaubildes und dem Hoch- bzw. Tiefpunkt. Aus dem Schaubild ergibt sich die Amplitude $b = 2$.

Daraus folgt $f(x) = 2 + 2 \cdot \sin(x)$.

Ableitungen:

Es gilt $f'(x) = 2 \cos(x)$ und $f''(x) = -2 \sin(x)$ und $f'''(x) = -2 \cos(x)$

Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$\Rightarrow -2 \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pi$

(alle anderen Lösungen liegen außerhalb der Skizze).

$f'''(0) = -2 \cos(0) = -2 \neq 0 \Rightarrow W_1(0/2)$ (y-Wert = $f(0) = 2 + \sin(0) = 2$)

$f'''(\pi) = -2 \cos(\pi) = 2 \neq 0 \Rightarrow W_2(\pi/2)$ (y-Wert = $f(\pi) = 2 + \sin(\pi) = 2$)

3.2

$f(x) = 2 - x + 2 \sin(x)$

Ableitungen:

$f'(x) = -1 + 2 \cos(x)$ und $f''(x) = -2 \sin(x)$ und $f'''(x) = -2 \cos(x)$

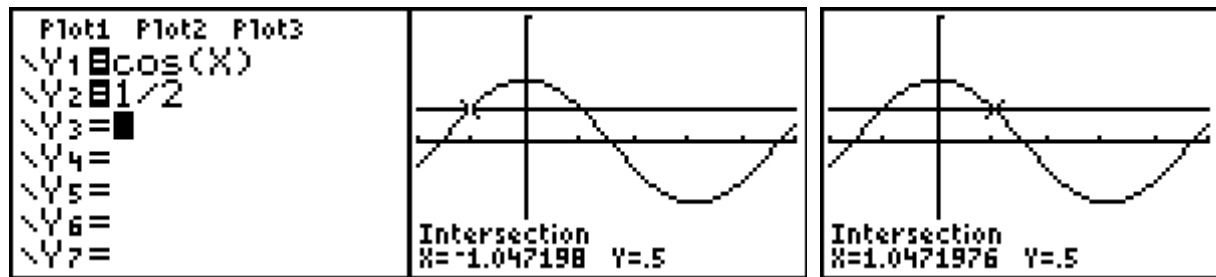
Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$\Rightarrow -1 + 2 \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

Als exakte Lösungen im Intervall $[-2;5]$ ergeben sich $x_1 = \frac{\pi}{3}$ und $x_2 = -\frac{\pi}{3}$

Mit dem GTR ergeben sich die (gerundeten) Lösungen $x = -1,047$ und $x = 1,047$.



$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{\pi}{3} / 2 - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ gemäß Formelsammlung}\right)$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0 \Rightarrow \text{TP}\left(-\frac{\pi}{3} / 2 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

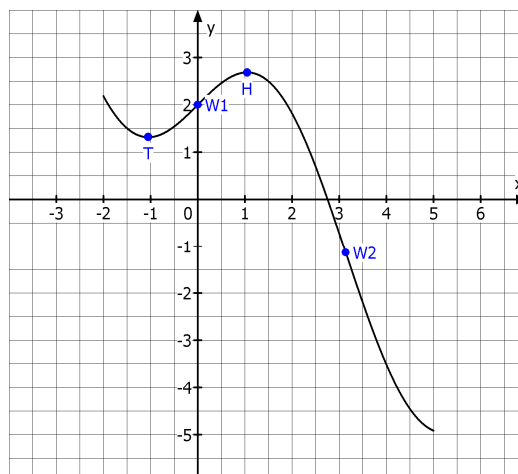
Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
 $-2 \sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pi$ im Intervall $[-2; 5]$

$$f'''(0) = -2 \cos(0) = -2 \neq 0 \Rightarrow W_1(0 / 2)$$

$$f'''(\pi) = -2 \cos(\pi) = 2 \neq 0 \Rightarrow W_2(\pi / 2 - \pi) \quad (\text{es gilt } f(\pi) = 2 - \pi + 2 \sin(\pi) = 2 - \pi)$$

Schaubild:



3.3

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x + 2 \sin(x) = 0$

Ein Näherungsverfahren zur Lösung dieser Gleichung ist das Newton-Verfahren.

Die Newton-Formel lautet $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Mit $f(x) = 2 - x + 2 \sin(x)$ und $f'(x) = -1 + 2 \cos(x)$ folgt $x_{n+1} = x_n - \frac{2 - x_n + 2 \sin(x_n)}{-1 + 2 \cos(x_n)}$

Aus der Skizze ergibt sich, dass man als Startwert $x_0 = 3$ wählen kann.

Mit dem GTR kann man nun die nächsten Werte berechnen.

```

3
Ans-(2-Ans+2*sin
(Ans))/(-1+2*cos
(Ans))
2.759139732
2.754676371
    
```

Es gilt $x_1 = 2,7591$; $x_2 = 2,7547$; $x_3 = 2,7547$
 Gerundet auf 3 Nachkommastellen folgt $x = 2,755$.

3.4

Nachweis der Berührung:

Die zweite Winkelhalbierende hat die Gleichung $g(x) = -x$.

Für eine Berührung der Schaubilder muss gelten:

(1) $f(x) = g(x)$ und (2) $f'(x) = g'(x)$

Aus (1) folgt: $2 - x + 2 \sin(x) = -x \Leftrightarrow \sin(x) = -1$

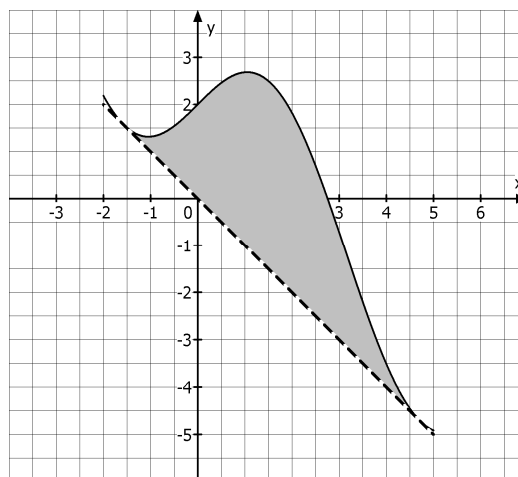
Daraus folgt $x = -\frac{1}{2}\pi$ oder $x = \frac{3}{2}\pi$.

Nun muss geprüft werden, ob die Lösungen aus (1) auch für (2) gelten:

$$f'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1 + 2 \cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1 = g'\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 + 2 \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 = g'\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Damit existieren zwei Berührstellen $x = -\frac{1}{2}\pi$ und $x = \frac{3}{2}\pi$.



Berechnung der Fläche A:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (2 - x + 2 \sin(x) - (-x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (2 + 2 \sin(x)) dx = [2x - 2 \cos(x)]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\
 &= 2 \cdot \frac{3}{2}\pi - 2 \cdot 0 - (2 \cdot (-\frac{1}{2}\pi) - 2 \cdot 0) = 3\pi - (-\pi) = 4\pi \text{ FE}
 \end{aligned}$$

3.5

Gegeben ist $g(x) = 2 \cdot (\sin(x) + 1)$; $x \in [-2, 5]$

Es gilt $g'(x) = 2 \cdot \cos(x)$

Tangentengleichung in A(0/2):

Tangentensteigung = $g'(0) = 2$

Mit der Punkt-Steigungsform folgt: $y - 2 = 2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 2x + 2$

Tangentengleichung in B($\pi/2$):

Tangentensteigung = $g'(\pi) = -2$

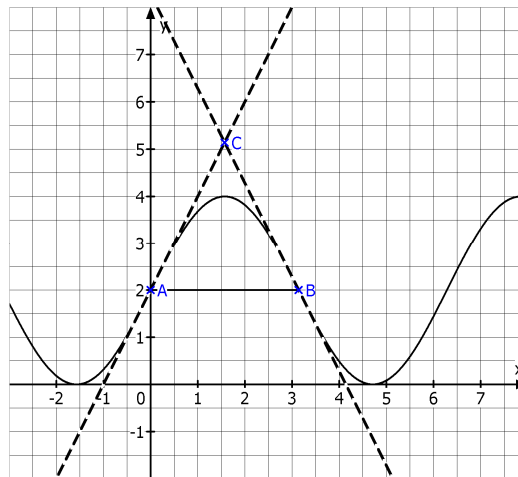
Mit der Punkt-Steigungsform folgt: $y - 2 = -2 \cdot (x - \pi) \Rightarrow y = -2x + 2\pi + 2$

Schnittpunkt C der Tangenten:

Gleichsetzen der Tangentengleichungen: $2x + 2 = -2x + 2\pi + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi$

Einsetzen in eine Tangente ergibt $y = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi + 2 = \pi + 2$ und daraus folgt $C(\frac{1}{2}\pi / \pi + 2)$.

Nachweis Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC:



Zu zeigen ist, dass zwei Seiten des Dreiecks gleich lang sind.

Für die Berechnung einer Strecke gilt die Formel: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(\pi - 0)^2 + (2 - 2)^2} = \pi$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(\frac{1}{2}\pi - 0)^2 + (\pi + 2 - 2)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\pi^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(\pi - \frac{1}{2}\pi)^2 + (\pi + 2 - 2)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\pi^2}$$

Da $\overline{AC} = \overline{BC}$ gilt, ist das Dreieck ABC gleichschenkl.

Andere Begründung: Da $m_{AC} = 2$ und $m_{BC} = -2$ ist (siehe Tangentensteigungen in A und B), sind die Winkel bei A und B gleich groß. Damit ist das Dreieck ABC gleichschenkl.