

Hauptprüfung 2002 Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(2/7/-2)$, $B(5/4/1)$ und $D(-4/3t+1/-8)$.

4.1

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B .

Bestimmen Sie t so, dass der Punkt D auf der Geraden g liegt.

(3 Punkte)

4.2

Zeigen Sie, dass die Punkte $S_1(0/9/-4)$ und $S_2(9/0/5)$ Spurpunkte der Geraden g sind.

Berechnen Sie die Koordinaten des dritten Spurpunktes S_3 . Zeichnen Sie die Punkte A , B und die Gerade in ein räumliches Koordinatensystem.

(x_2 - und x_3 -Achse mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$; x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und

$$1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm})$$

(7 Punkte)

4.3

Durch die Punkte A und B ist die Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 so, dass die Strecke $\overline{AB}$ durch diese Punkte in drei gleiche Teile geteilt wird.

(5 Punkte)

4.4

Die Punkte A , B und $C(-4/-5/-8)$ bilden ein Dreieck. Zeichnen Sie dieses Dreieck in das Koordinatensystem aus 4.2 und berechnen Sie für das Dreieck

- den Umfang
- die Innenwinkel
- den Flächeninhalt.

(11 Punkte)

4.5

Zeigen Sie, dass die Gerade h durch die Punkte B und C und die x_1 -Achse windschief sind.

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2002 Aufgabe 4

4.1

Geradengleichung von g durch A und B:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-7 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für welches t liegt D auf der Geraden g:

Einsetzen von D in die Geradengleichung g ergibt:
$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3t+1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 1 folgt: $-4 = 2 + 3r \Rightarrow r = -2$

Aus Zeile 2 folgt: $3t+1 = 7 - 3r \Leftrightarrow 3t+1 = 7 + 6 \Leftrightarrow t = 4$

Aus Zeile 3 folgt: $-8 = -2 + 3r \Rightarrow r = -2$

Die Gleichungen werden gelöst für $r = -2$ und $t = 4$.

Folglich liegt für $t=4$ der Punkt D auf der Geraden g.

4.2

Nachweis der Spurpunkte:

Einsetzen von $S_1(0/9/-4)$ in die Geradengleichung g ergibt:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus allen 3 Zeilen folgt $r = -\frac{2}{3}$ und damit liegt S_1 auf der Gerade g.

Einsetzen von $S_2(9/0/5)$ in die Geradengleichung g ergibt:
$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

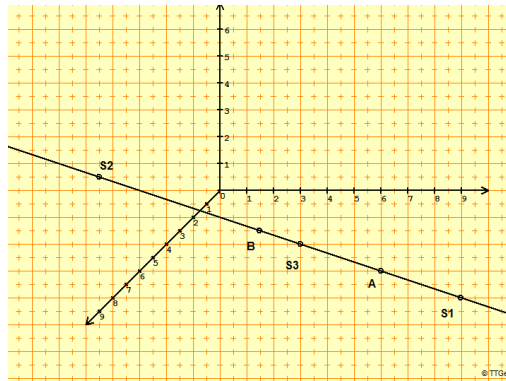
Aus allen 3 Zeilen folgt $r = \frac{7}{3}$ und damit liegt S_2 auf der Gerade g.

Berechnung des Spurpunktes S_3 mit der $x_1 - x_2$ -Ebene:

Es gilt $x_3 = 0 \Rightarrow 0 = -2 + 3r \Rightarrow r = \frac{2}{3}$

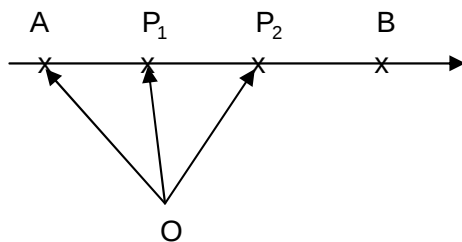
$r = \frac{2}{3}$ in die Geradengleichung eingesetzt folgt
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spurpunkt lautet $S_3(4/5/0)$.



4.3

Auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen die Punkte P_1 und P_2 .



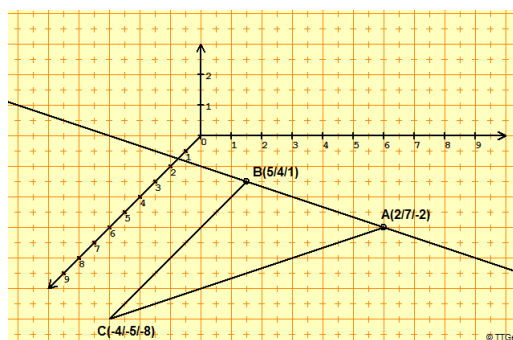
Für den Ortsvektor von P_1 gilt: $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

und damit gilt $P_1(3/6/-1)$.

Für den Ortsvektor von P_2 gilt: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

und damit gilt $P_2(4/5/0)$.

4.4



Umfang des Dreiecks ABC:

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 144 + 36} = \sqrt{216} = 6 \cdot \sqrt{6}$$

$$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{81 + 81 + 81} = \sqrt{243} = 9 \cdot \sqrt{3}$$

Daraus folgt: $U = 3 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot \sqrt{6} + 9 \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot \sqrt{6}$

Innenwinkel des Dreiecks ABC:

Berechnung des Winkels α : $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-18 + 36 - 18}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{216}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

Berechnung des Winkels β : $\cos \beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{243}} = \frac{27}{81} \Rightarrow \beta = 70,53^\circ$

Aufgrund der Winkelsumme folgt $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 70,53^\circ = 19,47^\circ$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, folgt $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{6} = 27 \cdot \sqrt{2} \text{ FE}$

4.5

Aufstellen der Geradengleichung h:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ bzw. } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nachweis der Windschief:

Gleichung der x_1 -Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da der Richtungsvektor der x_1 -Achse kein Vielfaches des Richtungsvektors der Gerade h ist sind die Geraden nicht parallel zu einander.

Der Schnitt von h und der x_1 -Achse ergibt:

$$\begin{aligned} 5 + s &= r \\ 4 + s &= 0 \Rightarrow s = -4 \\ 1 + s &= 0 \Rightarrow s = -1 \end{aligned}$$

Aufgrund des Widerspruchs ergibt sich keine Lösung. Damit sind die Geraden windschief.