

Hauptprüfung 2002 Aufgabe 5

5.1

Gegeben sind die Matrix M und die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -4 & -13 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.1.1

Bestimmen Sie den allgemeinen Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems

$M \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$. Wie lautet der Lösungsvektor, wenn $x_1 = 4$ ist ? (8 Punkte)

5.1.2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$. (4 Punkte)

5.2

Gegeben ist die Matrix N durch $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach

X auf und berechnen Sie die Matrix: $X + N \cdot X = N^2$. (8 Punkte)

5.3

Drei nach dem Leontief-Modell verflochtene Zweigwerke W_1 , W_2 und W_3 beliefern sich gegenseitig und den Markt. W_1 produziert 12 Einheiten, W_2 20 Einheiten und W_3 16 Einheiten. Die Technologiematrix ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{10} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

5.3.1

Wie viele Produktionseinheiten liefert jedes der Werke an sich selbst, an die beiden anderen und an den Markt ? Stellen Sie dazu die Verflechtungstabelle auf. (6 Punkte)

5.3.2

In Zukunft rechnet man mit dem Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \\ 16 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den

dazugehörigen Marktvektor $\vec{y}$. (4 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2002 Aufgabe 5

5.1.1

Allgemeiner Lösungsvektor des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \leftarrow \\ \leftarrow \\ | \cdot 3 \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot (-2) \leftarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Da die letzte Zeile eine Nullzeile ist, existieren unendlich viele Lösungen.

Es sei $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aus der 2. Zeile folgt: $-2x_2 - 10x_3 = 12 \Rightarrow x_2 = -5t - 6$

Aus der 1. Zeile folgt: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \Leftrightarrow x_1 - 2(-5t - 6) - 3t = 2 \Leftrightarrow x_1 = -7t - 10$

$$\text{Allgemeiner Lösungsvektor: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -7t - 10 \\ -5t - 6 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Wenn } x_1 = 4 \text{ ist folgt } -7t - 10 = 4 \Leftrightarrow t = -2 \text{ und damit } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.1.2

Lösung des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \leftarrow \\ \leftarrow \\ | \cdot 3 \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \cdot (-2) \leftarrow \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

Aus der letzten Zeile folgt der Widerspruch $0 = -4$, also Lösungsmenge $L = \{ \}$.

5.2

Auflösen nach X:

$$\begin{aligned}
 X + N \cdot X &= N^2 && | \text{ Ausklammern von } X \\
 (E + N) \cdot X &= N^2 && | \cdot (E + N)^{-1} \text{ von links} \\
 X &= (E + N)^{-1} \cdot N^2 && \text{ wobei } E = \text{Einheitsmatrix}
 \end{aligned}$$

Berechnung von X:

$$E + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit dem GTR ergibt sich: } (E + N)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } N^2 = N \cdot N = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mit dem GTR ergibt sich dadurch } X = (E + N)^{-1} \cdot N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.3.1

Für das Leontief-Modell gilt die Gleichung $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$

$$\text{Für den Produktionsvektor gilt } \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Für den Marktabgabevektor gilt } \vec{y} = \begin{pmatrix} \cancel{5/6} & -\cancel{1/5} & -\cancel{1/8} \\ -\cancel{1/3} & \cancel{4/5} & -\cancel{1/8} \\ -\cancel{1/3} & -\cancel{1/10} & \cancel{7/8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Werte aus der Technologiematrix A kann die Verflechtungstabelle (=Input-/Outputtabelle) aufgestellt werden.

	W_1	W_2	W_3	Markt	Produktion
W_1	$\frac{1}{6} \cdot 12$	$\frac{1}{5} \cdot 20$	$\frac{1}{8} \cdot 16$	4	12
W_2	$\frac{1}{3} \cdot 12$	$\frac{1}{5} \cdot 20$	$\frac{1}{8} \cdot 16$	10	20
W_3	$\frac{1}{3} \cdot 12$	$\frac{1}{10} \cdot 20$	$\frac{1}{8} \cdot 16$	8	16

	W_1	W_2	W_3	Markt	Produktion
W_1	2	4	2	4	12
W_2	4	4	2	10	20
W_3	4	2	2	8	16

5.3.2

Gegeben sei der neue Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich als neuer Marktabgabevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cancel{5}/6 & -\cancel{1}/5 & -\cancel{1}/8 \\ -\cancel{1}/3 & \cancel{4}/5 & -\cancel{1}/8 \\ -\cancel{1}/3 & -\cancel{1}/10 & \cancel{7}/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$