

Hauptprüfung 2002 Aufgabe 7

7.1

Die Kosten eines Betriebs lassen sich durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades berechnen. Der Verkaufspreis je Mengeneinheit (ME) ist durch den Markt vorgegeben und beträgt 15 Geldeinheiten (GE). Bei diesem Preis liegt die Nutzenschwelle bei 2 ME und das Betriebsminimum bei 3 ME. Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt 5 GE. Der Fixkostenanteil an den Gesamtkosten ist 18 GE.

Ermitteln Sie den Funktionsterm für die Kostenfunktion.

(8 Punkte)

7.2

Die Gesamtkostenfunktion K und die Erlösfunktion E sind für $0 \leq x \leq 6$ gegeben durch

$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18 \quad \text{und} \quad E(x) = 15x.$$

7.2.1

Zeichnen Sie die Schaubilder von K und E . (1 ME = 1cm; 10 GE = 1cm).

(3 Punkte)

7.2.2

Ermitteln Sie aus dem Schaubild die Nutzenschwelle und überprüfen Sie ihr Ergebnis durch Rechnung. Berechnen Sie die Nutzengrenze.

(6 Punkte)

7.3

Berechnen Sie die Produktionsmenge, die zum maximalen Gewinn führt. Wie groß ist der maximale Gewinn ?

(5 Punkte)

7.4

Berechnen Sie näherungsweise (auf zwei Nachkommastellen gerundet) die Produktionsmenge, bei welcher der Gewinn je ME am größten ist. Wie groß ist der maximale Gewinn je ME und der Gesamtgewinn bei dieser Produktionsmenge ?

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung Hauptprüfung 2002 Aufgabe 7

7.1

Die Kostenfunktion hat den Ansatz $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Aufgrund des Verkaufspreises von 15 GE je ME folgt für die Erlösfunktion: $E(x) = 15x$.

Die variable Stückkostenfunktion lautet $k_v(x) = ax^2 + bx + c$ und $k'_v(x) = 2ax + b$

Nutzenschwelle bei 2 ME: $K(2) = E(2) \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 15 \cdot 2$ (1)

Fixkostenanteil ist 18GE: $K(0) = 18 \Rightarrow d = 18$ (2)

Betriebsminimum liegt bei 3 ME: $k'_v(3) = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$ (3)

Kurzfristige Preisuntergrenze beträgt 5 GE: $k_v(3) = 5 \Rightarrow 9a + 3b + c = 5$ (4)

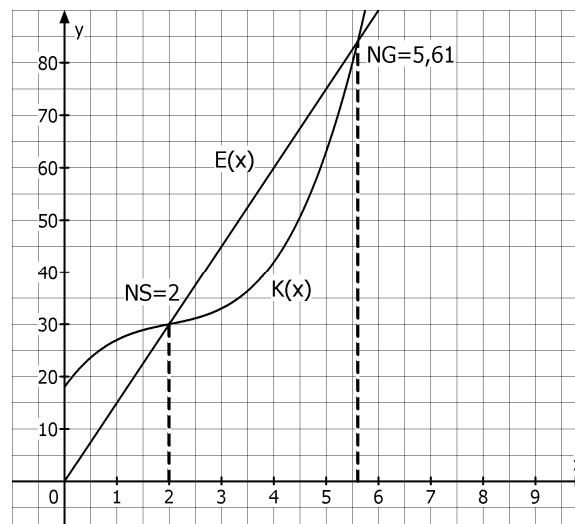
Aus den Gleichungen (1) – (4) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das mit dem GTR gelöst werden kann.

<pre> MATRIX[A] 4 x5 [8 4 2 - - [0 0 0 - - [6 1 0 - - [9 3 1 - - 4, 1=9 </pre>	<pre> rref([A]) [[1 0 0 0 1] [0 1 0 0 -6] [0 0 1 0 14] [0 0 0 1 18]] </pre>
--	---

Es folgt $a = 1$, $b = -6$, $c = 14$ und $d = 18$.

Die Kostenfunktion lautet $K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18$

7.2.1



7.2.2

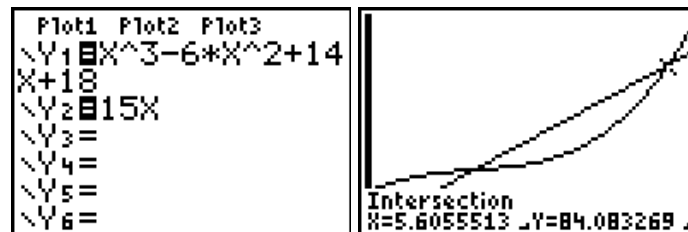
Die Nutzenschwelle (NS) ergibt sich aus dem obigen Schaubild als linke Schnittstelle der Kosten- und der Erlösfunktion an der Stelle $x = 2$.

Rechnerischer Nachweis:

$$E(2) = 15 \cdot 2 = 30 \quad \text{und} \quad K(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 + 18 = 30 = E(2).$$

Die Nutzengrenze ergibt sich als rechte Schnittstelle der Kosten- und der Erlösfunktion.

Mit dem GTR ergibt sich:



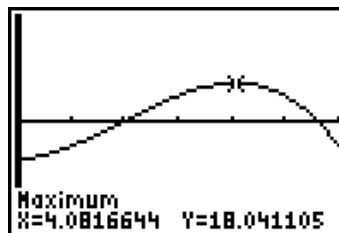
Die Nutzengrenze beträgt $x = 5,61$.

7.3

Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x) = E(x) - K(x) = 15x - (x^3 - 6x^2 + 14x + 18) = -x^3 + 6x^2 + x - 18 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Mit dem GTR ergibt sich, dass der Gewinn maximal wird für $x = 4,08$ ME.
Der maximale Gewinn beträgt 18,04 GE.



Berechnung ohne GTR:

Ein Gewinnmaximum liegt vor wenn $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$ gilt.

$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 1 \quad \text{und} \quad G''(x) = -6x + 12$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 12}}{-6} = \frac{-12 \pm \sqrt{156}}{-6}$$

Daraus folgt $x_1 = -0,08$ und $x_2 = 4,08$.

Aufgrund der vorgegebenen Definitionsmenge kommt nur $x = 4,08$ als Lösung in Frage.

Es gilt $G''(4,08) = -12,48 < 0$ und damit liegt ein lokales Maximum vor.

Es gilt $G(4,08) = 18,04$ GE

Die Untersuchung der Randwerte der Definitionsmenge liefert

$$G(0) = -18 < 0 \quad \text{und} \quad G(6) = -12.$$

Damit liegt bei $x = 4,08$ ein absolutes Maximum vor mit $G(4,08) = 18,04$ GE.

7.4

1. Lösungsmöglichkeit:

Die Funktion, die den Gewinn je ME liefert, lautet $g(x) = \frac{G(x)}{x} = -x^2 + 6x + 1 - \frac{18}{x}$

Gesucht ist das Maximum der Funktion $g(x)$.

Die Bedingung für das Maximum lautet $g'(x) = 0$ und $g''(x) < 0$.

Zur Ableitung von $g(x)$ muss die Funktion umgeschrieben werden: $g(x) = -x^2 + 6x + 1 - 18x^{-1}$

Daraus folgt $g'(x) = -2x + 6 + 18x^{-2}$ und $g''(x) = -2 - 36x^{-3}$.

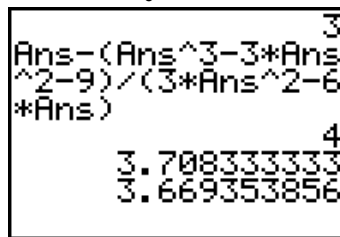
$$g'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 + \frac{18}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$\Rightarrow -2x^3 + 6x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 9 = 0$$

Aufgrund des Ausdrucks „näherungsweise“ in der Aufgabenstellung kann man davon ausgehen, dass die Lösung der Gleichung mit Hilfe des Newton-Verfahrens ermittelt werden soll.

$$\text{Newton-Formel: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 - 9}{3x_n^2 - 6x_n}$$

Mit Hilfe des GTR kann man als Startwert $x_0 = 3$ wählen.



```

Ans-(Ans^3-3*Ans
^2-9)/(3*Ans^2-6
*Ans)
3.708333333
3.669353856
  
```

Daraus folgt $x_1 = 4$; $x_2 = 3,708$; $x_3 = 3,669$; $x_4 = 3,6687$; $x_5 = 3,6687$

Als Näherungslösung folgt $x = 3,67$.

Da $g''(3,67) = -2 - 36 \cdot 3,67^{-3} < 0$ ist folgt daraus, dass dort ein Maximum vorliegt.

2. Lösungsmöglichkeit:

Der maximale Gewinn ergibt sich bei derjenigen Produktionsmenge, bei der die Kosten pro ME minimal sind. Dies ist beim so genannten Betriebsoptimum der Fall.

Die Bedingung für das Betriebsoptimum lautet $K'(x) = k(x)$.

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 14 = x^2 - 6x + 14 + \frac{18}{x} \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 12x^2 + 14x = x^3 - 6x^2 + 14x + 18$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 6x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9 = 0 \text{ und dann weiter mit Newton wie oben.}$$

$$\text{Der maximale Gewinn pro ME beträgt } g(3,67) = \frac{G(3,67)}{3,67} = \frac{17,05}{3,67} = 4,65 \text{ GE.}$$

Der Gesamtgewinn bei dieser Produktionsmenge beträgt $G(3,67) = 17,05 \text{ GE.}$