

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

- 4.1 Eine Polynomfunktion zweiten Grades verläuft durch die Punkte $A(1|2)$, $B(2|4)$ und $C(-1|4)$. Berechnen Sie einen Funktionsterm. (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = x^5 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_g .

- 4.2 Zeigen Sie, dass K_g keine Extrempunkte besitzt. (3 Punkte)
- 4.3 Begründen Sie, dass K_g im Bereich $-1 \leq x \leq 0$ eine Nullstelle hat. Ermitteln Sie näherungsweise die ersten beiden Nachkommastellen dieser Nullstelle. (5 Punkte)
- 4.4 Das Schaubild einer Stammfunktion G von g verläuft durch den Punkt $P(1|2,5)$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G . (4 Punkte)

Erfahrene Meteorologen sagen voraus, dass der Lufttemperaturverlauf (in $^{\circ}\text{C}$) an einen bestimmten Ort in den nächsten 24 Stunden näherungsweise durch die Funktion T mit $T(t) = -8 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6$; $t \geq 0$, t in Stunden, beschrieben werden kann. Dabei ist $t = 0$ um 6:00 Uhr.

- 4.5 Berechnen Sie, welche Höchst- bzw. Tiefsttemperatur nach diesem Modell in den nächsten 24 Stunden zu erwarten sind. Geben Sie alle Uhrzeiten an, zu welchen die Höchst- bzw. Tiefsttemperatur erreicht wird. (4 Punkte)
- 4.6 Bestimmen Sie die Werte von t , für die die Temperaturen über 0°C liegen. (4 Punkte)
- 4.7 Ermitteln Sie die Uhrzeit, zu der der momentane Temperaturanstieg am größten ist. (4 Punkte)

Lösung

4.1 Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bedingungen:

A(1|2): $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$

B(2|4): $f(2) = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4$

C(-1|4): $f(-1) = 4 \Rightarrow a - b + c = 4$

$$\begin{array}{rclcl} a & +b & +c & = & 2 & | \cdot (-4) & \leftarrow & | \cdot (-1) \\ 4a & +2b & +c & = & 4 & & & \\ a & -b & +c & = & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} a & +b & +c & = & 2 \\ & -2b & -3c & = & -4 \\ & -2b & & = & 2 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile folgt $b = -1$.

Aus der 2. Zeile folgt $c = 2$.

Aus der 1. Zeile folgt $a = 1$.

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = x^2 - x + 2$.

4.2 $g(x) = x^5 + x + 1$

Ableitungen: $g'(x) = 5x^4 + 1$

Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $g'(x) = 0$

$5x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -0,2$ ist nicht lösbar

Somit besitzt das Schaubild von g keine Extrempunkte.

4.3 Begründung der Nullstelle im Intervall $-1 \leq x \leq 0$:

Es gilt $g(-1) = -1$ und $g(0) = 1$.

Das heißt, dass das Schaubild von g einen VZW in diesem Intervall besitzt, also muss es dazwischen eine Nullstelle geben.

Mit Hilfe der Wertetabelle des WTR kann man die Nullstelle durch ausprobieren ermitteln: (Startwert -1, Endwert 0, Schrittweite 0,1):

$f(-0,8) = -0,127$ und $f(-0,7) = 0,1319$

Die Nullstelle liegt im Intervall $-0,8 \leq x \leq -0,7$.

Nun Startwert -0,8, Endwert -0,7 und Schrittweite 0,01 wählen:

$f(-0,76) = -0,013$ und $f(-0,75) = 0,0126$

Nun Startwert -0,76, Endwert -0,75 und Schrittweite 0,001 wählen:
 $f(-0,755) < 0$ und $f(-0,754) > 0$

Wegen $f(-0,7548) > 0$ und $f(-0,7549) < 0$ ist $x = -0,75$ die näherungsweise gerundete Nullstelle.

4.4 Stammfunktion von g:

$$G(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\text{Bedingung: } G(1) = 2,5 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + C = 2,5 \Rightarrow C = \frac{5}{6}$$

$$\text{Die gesuchte Funktionsgleichung lautet } G(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$$

4.5 Höchst- und Tiefstwerte von $T(t) = -8 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6$:

Der höchste und tiefste Wert werden erreicht, wenn der Kosinusausdruck seinen tiefsten Wert -1 bzw. seinen höchsten Wert 1 annimmt.

$$\text{Höchster Wert: } -8 \cdot (-1) + 6 = 14^\circ\text{C}$$

$$\text{Tiefster Wert: } -8 \cdot 1 + 6 = -2^\circ\text{C}$$

Bedingung für tiefsten Wert:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{12}t = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{also um 6.00 Uhr}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12}t = 2\pi \Rightarrow t = 24 \quad \text{also um 6.00 Uhr am nächsten Tag}$$

Bedingung für höchsten Wert:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{12}t = \pi \Rightarrow t = 12 \quad \text{also um 18.00 Uhr}$$

4.6 Bedingung, wann die Temperatur 0°C beträgt: $T(t) = 0$

$$-8 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6 = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{WTR: } \frac{\pi}{12}t \approx 0,723 \Rightarrow t \approx 2,76$$

$$\frac{\pi}{12}t \approx 0,723 + 2\pi \Rightarrow t \approx 26,76 > 24 \quad \text{also keine Lösung}$$

$$\frac{\pi}{12}t \approx 2\pi - 0,723 = 5,56 \Rightarrow t \approx 21,24$$

Da laut Aufgabe 4.5 die tiefsten Werte für $t = 0$ und $t = 24$ erreicht werden, kann man daraus schließen, dass im Zeitraum $2,76 < t < 21,24$ die Temperatur über 0°C liegt.

- 4.7 Der momentane Temperaturanstieg ist beim Wendepunkt mit positiver Steigung am höchsten.
Da bei $t = 0$ der Tiefpunkt und bei $t = 12$ der Hochpunkt liegt, ist bei einer trigonometrischen Funktion der Wendepunkt bei $t = 6$.
Der Temperaturanstieg ist um 12 Uhr am größten.