

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -\cos(2x) + 0,5$, $x \in [0; \pi]$.

Ihr Schaubild heißt K_h .

3.1 Geben Sie den Wertebereich von K_h an.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_h mit der x-Achse.

Zeichnen Sie K_h .

(9 Punkte)

3.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = 0,5$ schließt mit K_h eine Fläche ein.

Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

(6 Punkte)

3.3 Geben Sie jeweils einen veränderten Funktionsterm an, wenn

(1) das Schaubild von h an der x-Achse gespiegelt wird.

(2) das Schaubild von h um 2 nach unten verschoben wird.

(3) die Periode der neuen Funktion nun den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat.

(3 Punkte)

3.4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{0,5x} + bx + 1$, $x \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$.

Das Schaubild von f heißt K_f .

K_f verläuft durch den Ursprung und hat bei $x = 2$ einen Hochpunkt.

Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes und die Gleichung der Asymptote an.

(6 Punkte)

3.5 Gegeben ist die Ableitungsfunktion g' einer Funktion g durch

$$g'(x) = e^{\frac{1}{3}x} - 3 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Extremstelle von g .

Für welche x-Werte verläuft das Schaubild von g steigend?

(6 Punkte)

Lösung

- 3.1 Bei der Funktion h handelt es sich um eine um 0,5 nach oben verschobene Kosinusfunktion.
Der Wertebereich ist $[-0,5 ; 1,5]$.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $h(x) = 0$

$$-\cos(2x) + 0,5 = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0,5$$

Lösung mit dem WTR:

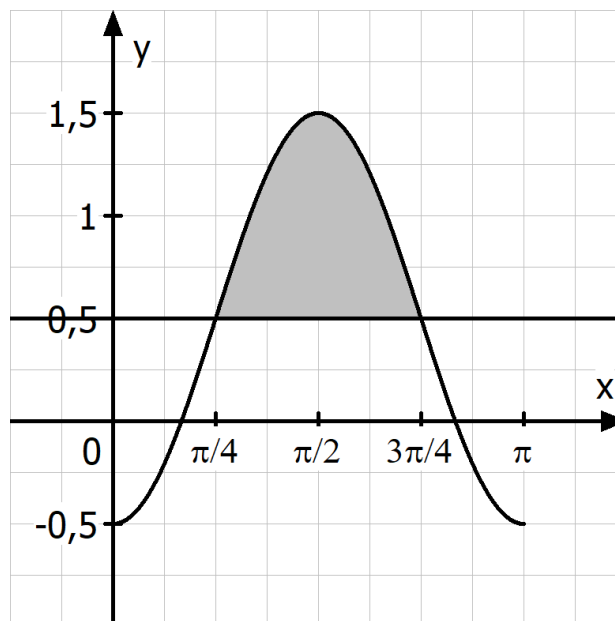
$$2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad N_1\left(\frac{\pi}{6} \mid 0\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \pm 2\pi \text{ führt auf keine weitere Lösung im Intervall } [0; \pi]$$

$$2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}\pi \quad N_2\left(\frac{5}{6}\pi \mid 0\right)$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi \pm 2\pi \text{ führt auf keine weitere Lösung im Intervall } [0; \pi]$$

Zeichnung:



- 3.2 Zur Berechnung der Fläche (siehe Abbildung in Aufgabe 3.1) benötigt man zunächst die Schnittstellen der Gerade $y = 0,5$ mit dem Schaubild von $h(x)$.

$$-\cos(2x) + 0,5 = 0,5 \Rightarrow -\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \qquad 2x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (h(x) - 0,5) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} -\cos(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} = 1$$

3.3

- (1) Spiegelung an der x-Achse: $h_1(x) = -h(x) = \cos(2x) - 0,5$
 (2) Um 2 nach unten verschoben: $h_2(x) = h(x) - 2 = -\cos(2x) + 0,5 - 2 = -\cos(2x) - 1,5$
 (3) Periode $p = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$, also $h_3(x) = -\cos(4x) + 0,5$

3.4 $f(x) = a \cdot e^{0,5x} + bx + 1$

Ableitung: $f'(x) = a \cdot 0,5 \cdot e^{0,5x} + b$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot e^0 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 0,5a \cdot e + b = 0 \Rightarrow -0,5e + b = 0 \Rightarrow b = 0,5e$$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -e^{0,5x} + 0,5e \cdot x + 1$

y-Wert des Hochpunktes: $f(2) = -e^1 + 0,5e \cdot 2 + 1 = 1$, also $H(2|1)$

Gleichung der Asymptote: $y = 0,5e \cdot x + 1$

3.5 Es gilt $g'(x) = e^{\frac{1}{3}x} - 3$ und $g''(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}$

Hinreichende Bedingung für Extremstelle: $g'(x) = 0$ und $g''(x) \neq 0$

$$e^{\frac{1}{3}x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{3}x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{3}x = \ln(3) \Rightarrow x = 3 \cdot \ln(3) \approx 3,3$$

$g''(3\ln(3)) = 1 > 0$, d.h. bei $x = 3\ln(3)$ befindet sich ein Tiefpunkt.

Das Schaubild von g verläuft daher für $x \geq 3\ln(3)$ monoton wachsend.