

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{3}x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

- 2.1 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.
 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_f .
 Zeichnen Sie K_f für $-4 \leq x \leq 4$. (8 Punkte)

- 2.2 Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $0 \leq u \leq 4$ schneidet die x -Achse in Punkt A und K_f in Punkt P. Der Ursprung O bildet mit A und P ein Dreieck.

- a) Veranschaulichen Sie dies für $u = 2$ im Schaubild aus 2.1.
 b) Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPA maximal ist.

(7 Punkte)

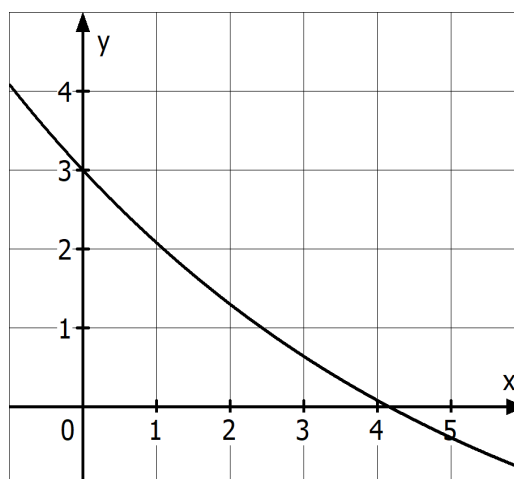
Gegeben sind die Funktion g durch $g(x) = 6e^{-\frac{1}{6}x} - 3$ mit $x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild K_g und die Gerade t mit der Gleichung $y = -x + 3$.

- 2.3 Zeigen Sie, dass sich die Gerade t und K_g im Schnittpunkt mit der y -Achse berühren.
 Begründen Sie, warum K_g und f keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.

(5 Punkte)

- 2.4 Berechnen Sie die Nullstelle von g .
 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_g mit den Koordinatenachsen einschließt.

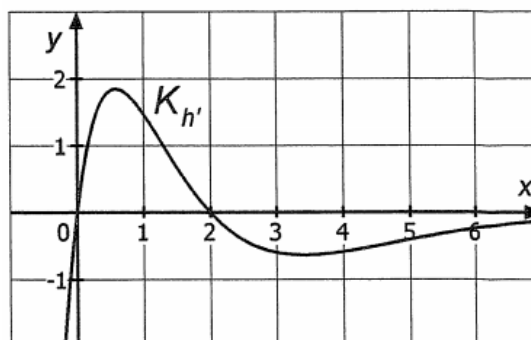
(6 Punkte)



- 2.5 Gegeben ist das Schaubild $K_{h'}$ der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h .
 Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen.

- (1) K_h hat an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt.
 (2) K_h ist für $1 \leq x \leq 2,5$ rechtsgekrümmt.

(4 Punkte)



Lösung

- 2.1 Das Schaubild K_f ist symmetrisch zur y-Achse, da im Funktionsterm alle Hochzahlen von x gerade sind.

Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{8}{27}x^3 - \frac{8}{3}x \qquad f''(x) = \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3} \qquad f'''(x) = \frac{16}{9}x$$

Berechnung der Wendepunkte:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

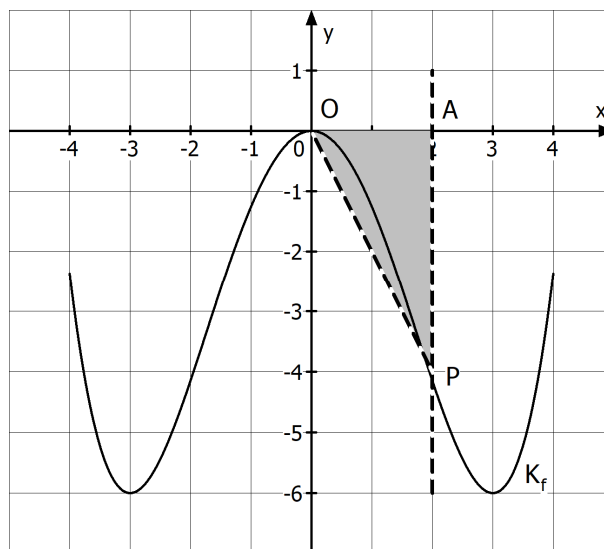
$$f'''(-\sqrt{3}) = -\frac{16}{9}\sqrt{3} \neq 0 \quad \text{also Wendepunkt}$$

$$\text{Aus } f(-\sqrt{3}) = -\frac{10}{3} \text{ folgt } W_1(-\sqrt{3} \mid -\frac{10}{3})$$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse existiert der zweite Wendepunkt

$$W_2(\sqrt{3} \mid -\frac{10}{3})$$

Zeichnung: (inkl. Skizze des Dreiecks aus Aufgabe 2.2 a))



2.2

- a) Veranschaulichung in 2.1

- b) Formel für Flächeninhalt des Dreiecks: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AP}$

Koordinaten der Eckpunkte: $O(0|0)$, $A(u|0)$, $P(u|f(u))$

Es gilt: $\overline{OA} = u - 0 = u$ und $\overline{AP} = 0 - f(u) = -f(u)$

$$\text{Zielfunktion: } A(u) = \frac{1}{2}u \cdot (-f(u)) = \frac{1}{2}u \cdot \left(-\frac{2}{27}u^4 + \frac{4}{3}u^2\right)$$

$$A(u) = -\frac{1}{27}u^5 + \frac{2}{3}u^3$$

$$\text{Ableitungen der Zielfunktion: } A'(u) = -\frac{5}{27}u^4 + 2u^2 \quad \text{und} \quad A''(u) = -\frac{20}{27}u^3 + 4u$$

Hinreichende Bedingung für lokales Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

$$-\frac{5}{27}u^4 + 2u^2 = 0 \Rightarrow u^2 \cdot \left(-\frac{5}{27}u^2 + 2\right) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } u^2 = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Gleichung II): } -\frac{5}{27}u^2 + 2 = 0 \Rightarrow u^2 = 10,8 \Rightarrow u = \pm\sqrt{10,8} \approx \pm 3,29$$

$u = -3,29$ scheidet als Lösung aus, da $0 \leq u \leq 4$

Da $u = 0$ ein Randwert ist, wird dieser Wert bei der Randwertuntersuchung betrachtet.

$$A''(\sqrt{10,8}) = -13,1 < 0, \text{ also lokales Maximum}$$

$$A(\sqrt{10,8}) \approx 9,46$$

$$\text{Untersuchung der Randwerte } u = 0 \text{ und } u = 4: \quad A(0) = 0 \quad A(4) = \frac{128}{27} \approx 4,74$$

Da die Werte an den Rändern kleiner sind als der Wert 9,46 ist für $u = \sqrt{10,8}$ der Flächeninhalt des Dreiecks maximal.

- 2.3 Die Schaubilder berühren sich, wenn sie an der Stelle $x = 0$ einen gemeinsamen Punkt und dieselbe Steigung besitzen.

$$\text{Es gilt } g(0) = 6e^{-\frac{1}{6} \cdot 0} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Einsetzen von $x = 0$ in die Gerade t ergibt auch $y = 3$.

Somit verlaufen beide Schaubilder durch den Punkt $P(0|3)$.

Steigung des Schaubildes K_g :

$$\text{Mit } g'(x) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) e^{-\frac{1}{6}x} = -e^{-\frac{1}{6}x} \text{ folgt } g'(0) = -1.$$

Die Gerade t besitzt ebenfalls die Steigung $m = -1$.

Somit berühren sich die Gerade und das Schaubild auf der y -Achse.

Weitere gemeinsame Punkte:

Da die zweite Ableitungsfunktion $g''(x) = \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}x}$ nur positive Werte annehmen kann, ist das Schaubild von g immer linksgekrümmt.

Aufgrund dieser Eigenschaft können die beiden Schaubilder keine weiteren gemeinsamen Punkte besitzen.

2.4 Nullstelle von g : $g(x) = 0$

$$6e^{-\frac{1}{6}x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{6}x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -6 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Inhalt der eingeschlossenen Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{-6 \cdot \ln(\frac{1}{2})} g(x) dx = \left[6 \cdot e^{-\frac{1}{6}x} \cdot (-6) - 3x \right]_0^{-6 \cdot \ln(\frac{1}{2})} = \left[-36 \cdot e^{-\frac{1}{6}x} - 3x \right]_0^{-6 \cdot \ln(\frac{1}{2})} \\ &= -18 + 18 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 36 = 18 + 18 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5,52 \end{aligned}$$

2.5

- (1) Die Aussage ist wahr, da die Ableitungsfunktion bei $x = 2$ eine Nullstelle mit einem VZW von $+$ nach $-$ besitzt.
- (2) Die Aussage ist wahr, da die Ableitungsfunktion in diesem Intervall streng monoton fallend ist, also $h''(x) < 0$ ist.