

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2019

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

Berufskolleg

Alexander Schwarz

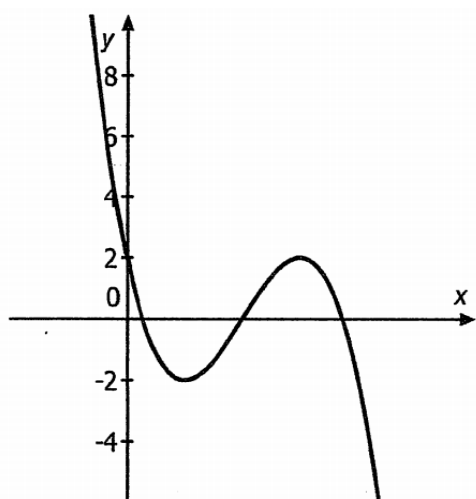
www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Aufgabe 1:

1.1 Lösen Sie die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 16 = -1$. (5 Punkte)

1.2 Gegeben ist das Schaubild einer Polynomfunktion f dritten Grades. Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.



- a) Das Schaubild der ersten Ableitungsfunktion von f ist eine nach unten geöffnete Parabel.
- b) Das Schaubild einer neuen Funktion $f_{\text{neu}}(x) = f(x) + 1$ schneidet die x -Achse genau zweimal.
- c) Das Schaubild einer Stammfunktion von f besitzt genau einen Wendepunkt.

(6 Punkte)

1.3 Gegeben ist eine Funktion g mit $g(x) = x^3 - 2x^2 + 16$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 2$.

(4 Punkte)

1.4 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{4 \ln(2)} e^{0,25x} dx$. (4 Punkte)

1.5 Die Funktion k ist gegeben durch $k(x) = 2e^{-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild heißt K . Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an. Skizzieren Sie K . In welchem Quadranten schließt K mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein?

(5 Punkte)

1.6 Eine Polynomfunktion p vom Grad 4 soll dieselben Nullstellen haben wie die Funktion h mit $h(x) = 3 \sin(\pi x)$, $x \in [0; 3]$.

Weiterhin hat p an der Stelle $x = \frac{3}{2}$ den Funktionswert 3.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p .

(6 Punkte)

Lösung

1.1 $x^4 + 2x^2 - 16 = -1$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^2 - 15 = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = u$$

$$\Rightarrow u^2 + 2u - 15 = 0 \quad \text{Lösung mit der abc-Formel}$$

$$u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}, \text{ also } u_1 = 3 \text{ und } u_2 = -5$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 = -5 \quad \text{Gleichung ist nicht lösbar}$$

Somit existieren zwei Lösungen $x = \sqrt{3}$ und $x = -\sqrt{3}$

1.2

a) Die Aussage ist wahr.

Begründung 1: Das Schaubild von f verläuft vom 2. in den 4. Quadranten und ist vom Grad drei, die Zahl vor der höchsten Potenz ist negativ. Das heißt, dass die Ableitungsfunktion vom Grad zwei ist und das Vorzeichen der höchsten Potenz ist negativ. Das heißt, dass in der Ableitungsfunktion das Vorzeichen vor der Variable x^2 ebenfalls negativ ist.

Das heißt, dass das Schaubild der Ableitungsfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Begründung 2: Das Schaubild ist vom Grad drei, damit ist die Ableitungsfunktion vom Grad 2 und besitzt als Schaubild eine Parabel.

Die erste Extremstelle (Tiefpunkt) wird in der Ableitungsfunktion zu einer Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach +.

Die zweite Extremstelle (Hochpunkt) wird in der Ableitungsfunktion zu einer Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach -.

Aufgrund der dargestellten Vorzeichenwechsel besitzt die Parabel einen Hochpunkt als Scheitelpunkt. Damit ist die Parabel nach unten geöffnet.

b) Die Aussage ist falsch.

Das Schaubild von $f_{\text{neu}}(x) = f(x) + 1$ entsteht durch eine Verschiebung des dargestellten Schaubildes um 1 Einheit nach oben.

Da der Tiefpunkt den y-Wert -2 besitzt, befindet sich der Tiefpunkt nach der Verschiebung immer noch unterhalb der x-Achse und der Hochpunkt oberhalb der x-Achse. Das Schaubild der neuen Funktion schneidet die x-Achse dreimal.

c) Die Aussage ist falsch.

Da das Schaubild von f zwei Extremstellen besitzt, besitzt das Schaubild der Stammfunktion zwei Wendestellen und damit zwei Wendepunkte.

1.3 Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 2$:

Aus $g(x) = x^3 - 2x^2 + 16$ folgt $g'(x) = 3x^2 - 4x$.

Steigung der Tangente: $g'(2) = 4$

Berechnung eines Tangentenpunktes: $g(2) = 16$

Also liegt der Punkt $B(2|16)$ auf der Tangente.

Ansatz für Tangentengleichung: $y = mx + b$

Einsetzen der Steigung und des Punktes B: $16 = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 8$

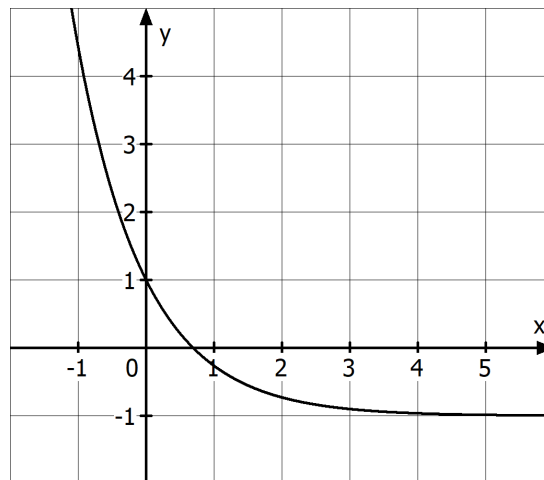
Tangentengleichung: $y = 4x + 8$

$$1.4 \quad \int_0^{4 \cdot \ln(2)} e^{0,25x} dx = \left[e^{0,25x} \cdot \frac{1}{0,25} \right]_0^{4 \cdot \ln(2)} = \left[4 \cdot e^{0,25x} \right]_0^{4 \cdot \ln(2)} = 4 \cdot e^{\ln(2)} - 4 \cdot e^0 = 8 - 4 = 4$$

$$1.5 \quad k(x) = 2e^{-x} - 1$$

Die waagrechte Asymptote lautet $y = -1$ für $x \rightarrow +\infty$

Skizze:



Das Schaubild schließt im 1. Quadranten eine Fläche mit den Koordinatenachsen ein.

1.6 Nullstellen von h : $h(x) = 0$

$$3 \cdot \sin(\pi \cdot x) = 0 \Rightarrow \sin(\pi \cdot x) = 0 \quad \text{mit } x \in [0; 3]$$

$$\pi \cdot x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\pi \cdot x = \pi \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\pi \cdot x = 2\pi \Rightarrow x_3 = 2$$

$$\pi \cdot x = 3\pi \Rightarrow x_4 = 3$$

Ansatz für die Funktion $p(x)$: $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$

$$p(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Außerdem gilt $p(\frac{3}{2}) = 3$

$$3 = a \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{16}{3}$$

Die Funktion lautet $p(x) = \frac{16}{3} \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$