

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie B1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2020

Aufgabe B1:

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $K(5|0|1)$, $L(2|5|0)$, $M(0|5|2)$ und $N(1|0|5)$.

- a) Zeichnen Sie das Viereck KLMN in die Abbildung ein.
 Zeigen Sie, dass das Viereck KLMN ein Trapez ist und zwei gleich lange Seiten hat.
 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von T mit der x_1 -Achse an.
 (Teilergebnis: T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$)

(5 VP)

- b) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche KLMN liegt auf der Strecke FG.

Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

(2 VP)

- c) Betrachtet wird die Schar der Geraden

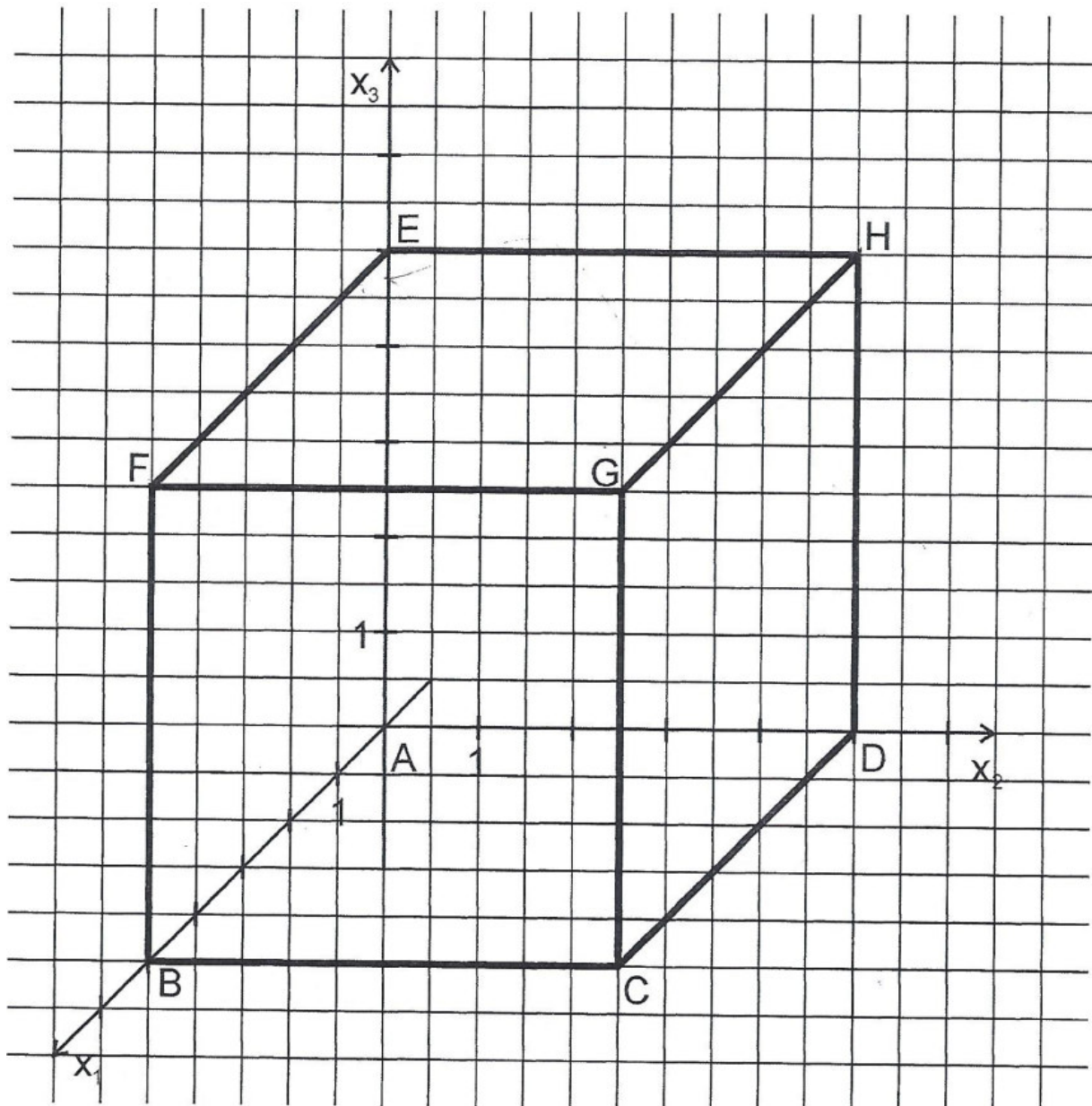
$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a > 0.$$

Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3,5$ liegt.

Gegeben ist die Ebene U: $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$.

Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und U zur betrachteten Schar gehört.

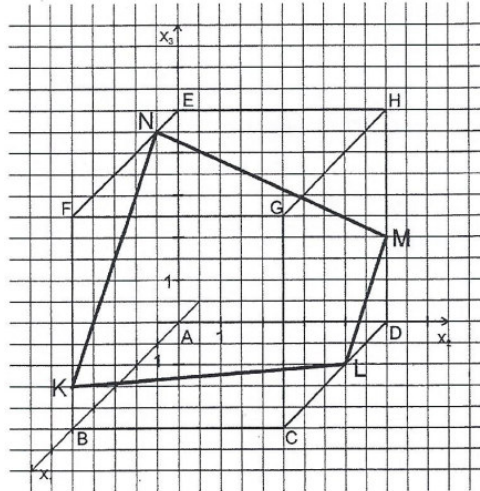
(3 VP)



Lösungen

Aufgabe B1:

a) Zeichnung des Vierecks KLMN:



Nachweis, dass das Viereck ein Trapez ist:

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind vielfache zu einander, daher sind sie parallel und es liegt ein Trapez vor.

Nachweis, dass zwei Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{KL}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35} \quad |\overrightarrow{MN}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$$

Gleichung der Ebene T in Parameterform:

$$T: \vec{x} = \overrightarrow{OK} + r \cdot \overrightarrow{KN} + s \cdot \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung von T:

$$\text{Normalenvektor von T: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ansatz für Koordinatengleichung: T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$

Einsetzen des Punktes K(5|0|1): $25 + 5 = 30 \Rightarrow d = 30$

Koordinatengleichung von T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

Schnittpunkt von T mit der x_1 -Achse: $S(x_1 | 0 | 0)$ ergibt $S(6 | 0 | 0)$

b) Koordinaten von F: $F(5|0|5)$

Die Strecke $\overline{FG}$ liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OF} + t \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Punkt F wird erreicht für $t = 0$ und der Punkt G wird erreicht für $t = 1$.

Ein allgemeiner Punkt auf der Strecke $\overline{FG}$ hat die Koordinaten $S(5|5t|5)$ mit $0 \leq t \leq 1$.

HNF von T: $\frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{66}} = 0$

Abstand des Punktes S von der Ebene T:

$$d(S, T) = \left| \frac{5 \cdot 5 + 4 \cdot 5t + 5 \cdot 5 - 30}{\sqrt{66}} \right| = \left| \frac{20 + 20t}{\sqrt{66}} \right| = \frac{18}{\sqrt{66}}$$

Für die Betragsgleichung gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $20 + 20t = 18 \Rightarrow t = -0,1$ liegt nicht im Intervall $0 \leq t \leq 1$

Fall 2: $20 + 20t = -18 \Rightarrow t = -1,9$ liegt nicht im Intervall $0 \leq t \leq 1$

Somit kann die Höhe der Pyramide nicht $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen.

c) Schnittpunkt der Geradenschar mit der Ebene:

$$3,5 + r \cdot \frac{2}{a} = 3,5 \Rightarrow r \cdot \frac{2}{a} = 0$$

Wenn die Gerade in Ebene liegen soll, muss eine wahre Aussage entstehen und die Variable r herausfallen.

Das wäre jedoch nur so, wenn $\frac{2}{a} = 0$ ist. Diese Gleichung ist jedoch nicht lösbar.

Somit kann keine der Schargeraden in der Ebene liegen.

Eine Gerade der Schar ist eine Schnittgerade unter folgenden Bedingungen:

1.) Der Punkt $P(2,5|0|3,5)$ der Schar auf den Ebenen T und U liegen.

Punktprobe mit T: $5 \cdot 2,5 + 0 + 5 \cdot 3,5 = 30$ ist eine wahre Aussage

Punktprobe mit U: $-5 \cdot 2,5 + 0 + 5 \cdot 3,5 = 5$ ist eine wahre Aussage

- 2.) Der Richtungsvektor der Schar muss sowohl senkrecht zum Normalenvektor von T als auch zum Normalenvektor von U sein.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -40a + \frac{10}{a} = 0 \Rightarrow -40a^2 + 10 = 0 \Rightarrow a = \pm 0,5$$

Da $a > 0$ sein soll, kommt nur $a = 0,5$ in Frage.

Prüfung, ob für $a = 0,5$ der Richtungsvektor der Schargeraden auch auf dem Normalenvektor von U senkrecht ist:

$$\text{Es gilt } \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 - 20 + 20 = 0.$$

Damit ist die Bedingung für $a = 0,5$ erfüllt.

Also gehört die Schnittgerade von T und U zur Schar.