

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis A1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Aufgabe A 1.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f , die für $0 \leq t \leq 17$ die Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen und $f(t)$ die Höhe in Zentimetern.

- a) Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von 20 cm auf 40 cm zunimmt. Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe 3,5 Wochen nach Beobachtungsbeginn.
Die Funktion f hat bei $t = 6,5$ eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.

(4 VP)

- b) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ eine Fragestellung im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion f mit

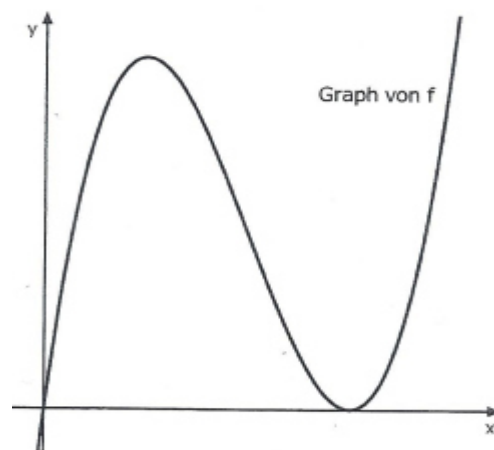
$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x.$$

Die Abbildung zeigt ihren Graphen.

- a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $T(6|0)$ Tiefpunkt des Graphen ist.

Betrachtet wird die Strecke OH zwischen $O(0|0)$ und dem Hochpunkt $H(2|8)$ des Graphen von f . Diese Strecke und der Graph von f begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.

(5 VP)



- b) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -3 \cdot f(x) - 6$.

Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht. Bestimmen Sie damit die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von g .

(3 VP)

- c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ liegt, berührt den Graphen von f im Punkt $P(4|4)$. Berechnen Sie die Koordinaten von M .

(2,5 VP)

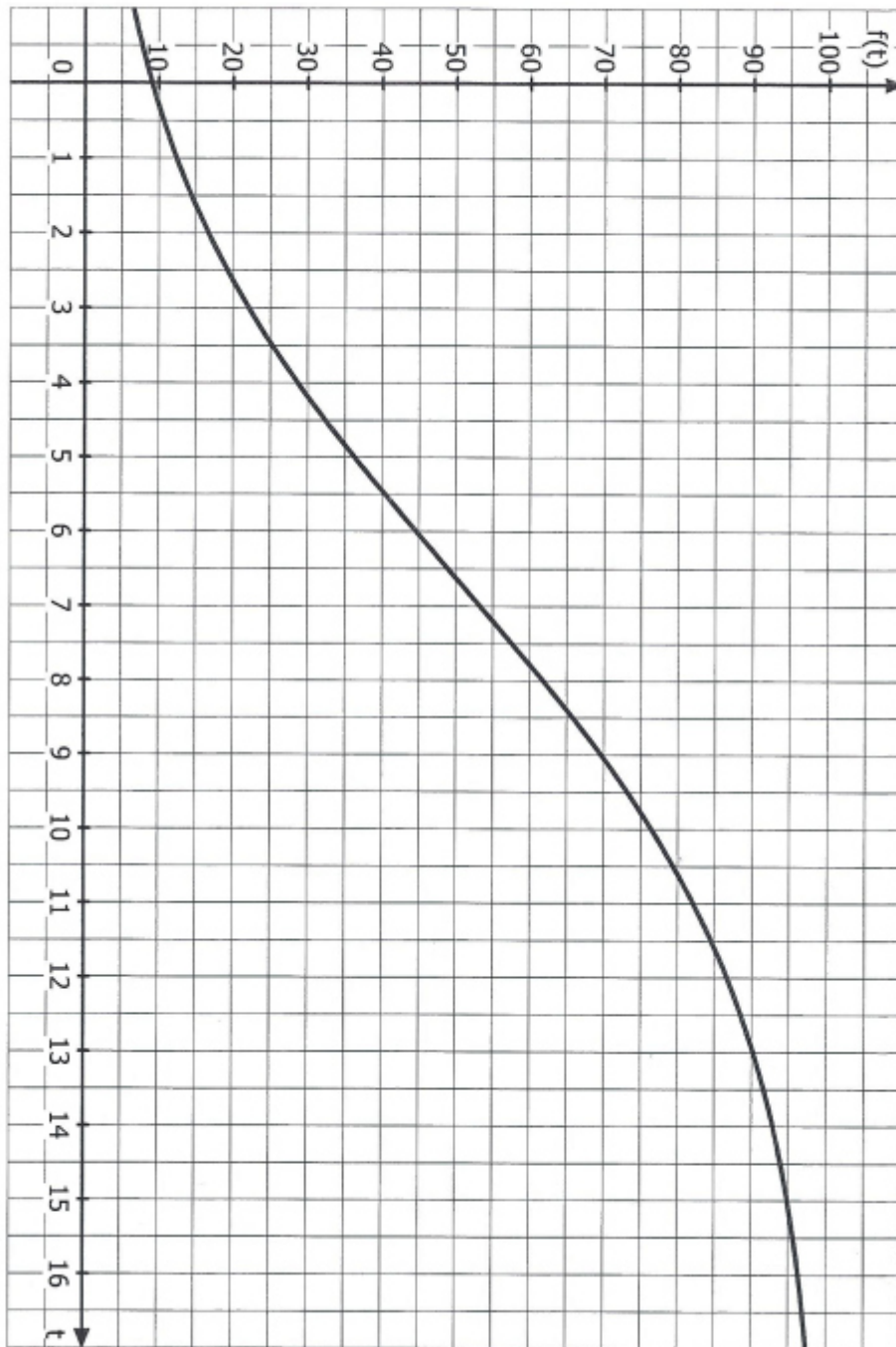
- d) Für jedes k mit $k \neq 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx.$$

Berechnen Sie die Werte von k , für die die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $P(1|f_k(1))$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 8x + 3$ ist.

(3 VP)

Abbildung zu Aufgabe A 1.1



Lösungen

Aufgabe A 1.1

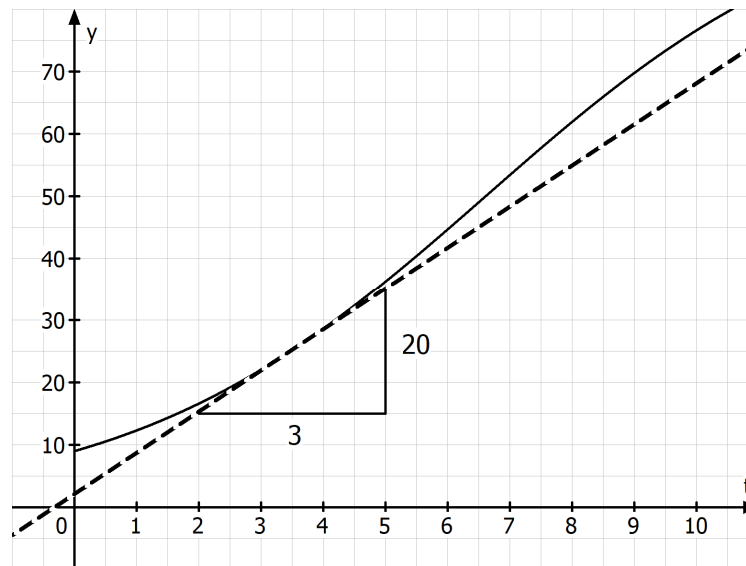
a) Höhenzunahme:

Laut dem Schaubild ist die Pflanze nach ca. 2,6 Wochen 20 cm hoch.
Nach ca. 5,5 Wochen ist die Pflanze 40 cm hoch.

Im Zeitraum zwischen 2,6 und 5,5 Wochen nach Beobachtungsbeginn nimmt die Höhe der Pflanze von 20 cm auf 40 cm zu.

Momentane Änderungsrate nach 3,5 Wochen:

Hierzu muss die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 3,5$.



Die Steigung der Tangente beträgt ungefähr $f'(3,5) \approx \frac{20}{3} = 6,7$

Die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe beträgt ca. 6,7 Zentimeter pro Woche.

Bedeutung der Wendestelle:

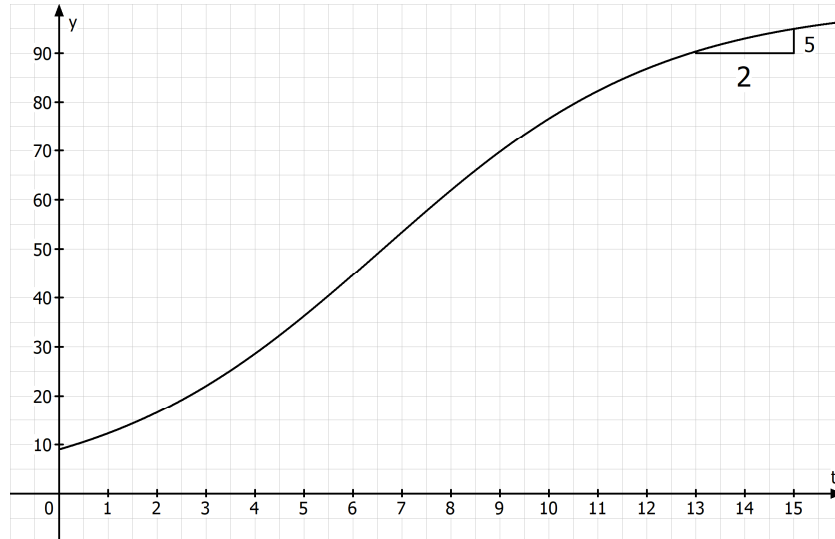
Zu diesem Zeitpunkt ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze maximal.

b) Fragestellung:

Bei der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ ist der Zwei-Wochen-Zeitraum gesucht, in dem die Pflanze um 5 cm wächst.

Lösung der Gleichung:

Aus dem Schaubild kann man ablesen, dass im 2-Wochen-Zeitraum [13 ; 15] die Pflanze um 5 cm wächst.



Die Lösung der Gleichung beträgt $t = 13$.

Aufgabe A 1.2

a) Nachweis des Tiefpunkts:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$$

$$\text{Es gilt } f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 \text{ und } f''(x) = \frac{3}{2}x - 6$$

Hinreichende Bedingung: $f'(6) = 0$ und $f''(6) > 0$

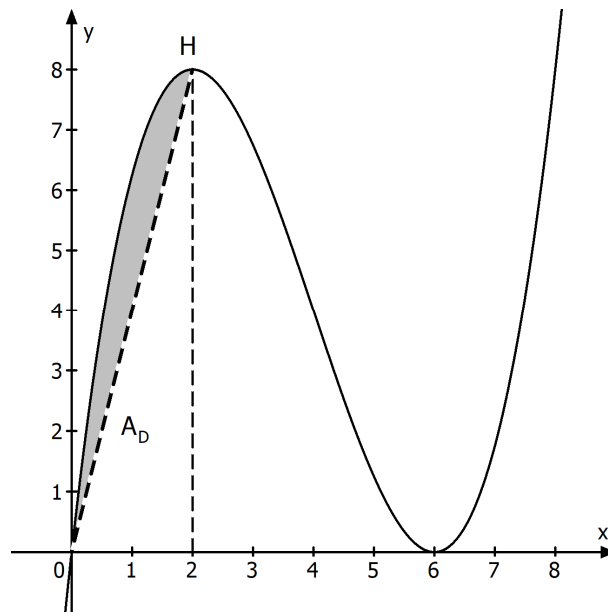
$$\text{Es gilt } f'(6) = \frac{3}{4} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + 9 = 0, \text{ also ist die Bedingung erfüllt}$$

$$\text{Es gilt } f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 3 > 0, \text{ also ist die Bedingung erfüllt}$$

Somit liegt bei $x = 6$ ein Tiefpunkt vor.

$$\text{Es gilt } f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^3 - 3 \cdot 6^2 + 9 \cdot 6 = 0, \text{ daher ist der Tiefpunkt } T(6|0).$$

Flächeninhalt:



1. Möglichkeit:

$$A = \int_0^2 f(x) dx - A_D = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x^3 - 3x^2 + 9x \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = \left[\frac{1}{16} x^4 - x^3 + \frac{9}{2} x^2 \right]_0^2 - 8$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 16 - 8 + 18 - 0 - 8 = 3 \text{ FE}$$

2. Möglichkeit:

Die Strecke OH liegt auf der Geraden $y = 4x$.

$$A = \int_0^2 (f(x) - 4x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x^3 - 3x^2 + 5x \right) dx = \left[\frac{1}{16} x^4 - x^3 + \frac{5}{2} x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 16 - 8 + 10 - 0 = 3 \text{ FE}$$

- b) Der Graph von g entsteht aus dem von f durch Streckung in y -Richtung mit dem Faktor 3, Spiegelung an der x -Achse und anschließende Verschiebung in y -Richtung um 6 nach unten.

Aus dem Hochpunkt des Schaubildes von f wird aufgrund der Spiegelung an der x -Achse ein Tiefpunkt von g .

$H(2|8)$

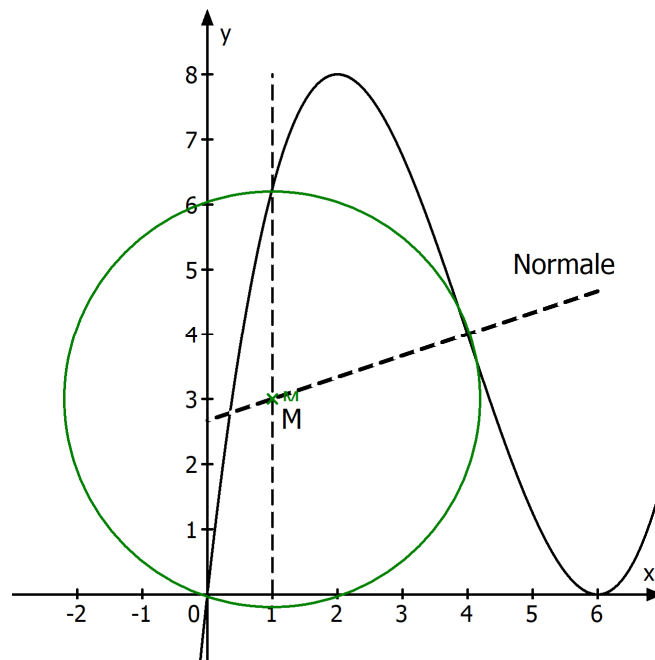
Streckung mit dem Faktor 3 in y -Richtung ergäbe den Hochpunkt $H^*(2|24)$.

Spiegelung an der x -Achse ergäbe den Tiefpunkt $T^*(2|-24)$.

Verschiebung um 6 nach unten ergibt den Tiefpunkt $T^{**}(2|-30)$.

Das Schaubild von g besitzt den Tiefpunkt $T^{**}(2|-30)$.

c)



Zur Berechnung des Mittelpunktes wird im Punkt $P(4|4)$ die Normale an das Schaubild von f aufgestellt.

Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen von $u = 4$ ergibt: $y = -\frac{1}{f'(4)} \cdot (x - 4) + f(4)$

Es gilt $f(4) = 4$ und $f'(4) = \frac{3}{4} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 9 = -3$

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{-3} \cdot (x - 4) + 4$
 $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

Einsetzen von $x = 1$ in die Normalengleichung ergibt $y = 3$.

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $M(1|3)$.

d) Damit die Tangente parallel zur Geraden $y = 8x + 3$ verläuft, muss die Steigung $m = 8$ sein.

Bedingung: $f'_k(1) = 8$

Es gilt $f'_k(x) = \frac{3}{2k}x^3 - 6x + \frac{9}{2}k$ und damit $f'_k(1) = \frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k$

Es soll also gelten: $\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k = 8 \quad | \cdot 2k$

$$\Rightarrow 3 - 12k + 9k^2 = 16k$$

$$\Rightarrow 9k^2 - 28k + 3 = 0$$

$$\Rightarrow k_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 9 \cdot 3}}{18} = \frac{28 \pm 26}{18}$$

Es gilt $k_1 = 3$ und $k_2 = \frac{1}{9}$.