

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 1 In den Skigebieten A, B und C verbringen jährlich immer die gleichen 200 000 Gäste ihren Skiurlaub. Die Übergangstabelle bzw. die Übergangsmatrix M legen modellhaft die Veränderung der Gästeverteilung auf die drei Skigebiete von einem zum nächsten Jahr fest.

zu \ von	A	B	C
A	0,9	0,15	0,2
B	0,06	0,8	0,2
C	0,04	0,05	0,6

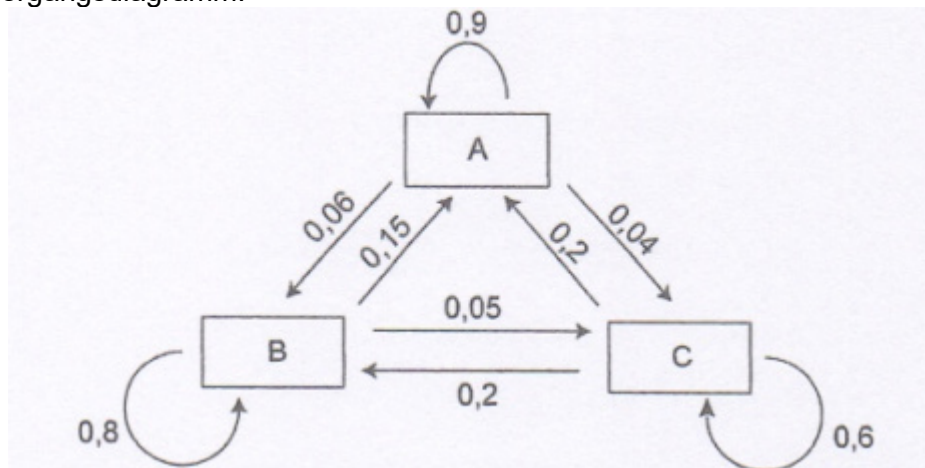
; $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix}$

- 1.1 Geben Sie ein Übergangsdiagramm an und interpretieren Sie den Wert 0,04 in M.
(4 Punkte)
- 1.2 In A verbringen 60%, in B 30% und in C 10% der Gäste ihren Skiurlaub. Ermitteln Sie für das folgende Jahr die jeweilige Anzahl der Gäste. Bestimmen Sie das Skigebiet, in dem der größte prozentuale Unterschied entsteht.
(4 Punkte)
- 1.3 In einer Simulation wird angenommen, dass im Jahr 2020 die Anzahl der Gäste in A mit der Summe der Anzahl der Gäste in B und C übereinstimmt. Man geht zudem davon aus, dass im Jahr 2021 in B genau 63500 Gäste ihren Skiurlaub verbringen werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Gäste von Skigebiet A, B und C im Jahr 2020.
(4 Punkte)
- 1.4 Berechnen Sie die prozentuale Gästeverteilung, die von Jahr zu Jahr gleich bleibt.
(3 Punkte)

Lösungen

- 1.1 Geben Sie ein Übergangsdiagramm an und interpretieren Sie den Wert 0,04 in M.

Übergangsdiagramm:



Interpretation von 0,04:

Das Skigebiet A verliert jährlich 4% seiner Gäste an Skigebiet C.

- 1.2 Ermitteln Sie für das folgende Jahr die jeweilige Anzahl der Gäste.

Von den 200.000 Gästen verbringen $0,6 \cdot 200000 = 120000$ Gäste den Urlaub in A,
 $0,3 \cdot 200000 = 60000$ in B und $0,1 \cdot 200000 = 20000$ in C.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120000 \\ 60000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121000 \\ 59200 \\ 19800 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Jahr sind 121.000 Gäste in A, 59200 in B und 19800 in C.

Bestimmen Sie das Skigebiet, in dem der größte prozentuale Unterschied entsteht.

Prozentuale Änderungen

$$\text{A: } \frac{+1000}{120000} = +0,0083 = +0,83\%$$

$$\text{B: } \frac{-800}{60000} = -0,0133 = -1,33\%$$

$$\text{C: } \frac{-200}{20000} = -0,01 = -1,0\%$$

Das Skigebiet B hat den größten prozentualen Unterschied.

1.3 Bestimmen Sie die Anzahl der Gäste von Skigebiet A, B und C im Jahr 2020.

Der Vektor für die Anzahl der Gäste im Jahr 2020 ist $\begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Anzahl der Gäste im Jahr 2021:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0,06(b+c) + 0,8b + 0,2c \\ \dots \end{pmatrix}$$

Es soll gelten:

$$(1) \quad b+c+b+c = 200000 \Rightarrow 2b+2c = 200000$$

$$(2) \quad 0,06(b+c) + 0,8b + 0,2c = 63500 \Rightarrow 0,86b + 0,26c = 63500$$

Aus (1) folgt $c = 100000 - b$

$$\text{Einsetzen in (2): } 0,86b + 0,26(100000 - b) = 63500 \Rightarrow 0,6b = 37500 \Rightarrow b = 62500$$

$$\text{Daraus folgt } c = 100000 - 62500 = 37500$$

Im Jahr 2020 hat B 62500 Gäste, C 37500 Gäste und A 100.000 Gäste.

1.4 Berechnen Sie die prozentuale Gästeverteilung, die von Jahr zu Jahr gleich bleibt.

Bedingung für stationäre Verteilung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$$

$$\text{Zeile 1: } 0,9a + 0,15b + 0,2(1-a-b) = a \Rightarrow -0,3a - 0,05b = -0,2$$

$$\text{Zeile 2: } 0,06a + 0,8b + 0,2(1-a-b) = b \Rightarrow -0,14a - 0,4b = -0,2$$

$$\text{Zeile 3: } 0,04a + 0,05b + 0,6(1-a-b) = 1-a-b \Rightarrow 0,44a + 0,45b = 0,4$$

$$\text{Aus Zeile 1 folgt: } -0,05b = -0,2 + 0,3a \Rightarrow b = 4 - 6a$$

$$\text{Einsetzen in Zeile 2: } -0,14a - 0,4(4 - 6a) = -0,2 \Rightarrow 2,26a = 1,4 \Rightarrow a = \frac{70}{113} \approx 0,62$$

$$b = 4 - 6 \cdot \frac{70}{113} = \frac{32}{113} \approx 0,28$$

Einsetzen der Werte von a und b in Zeile 3 führt auf eine wahre Aussage.

Prozentuale Gästeverteilung:

A: 62%, B: 28%, C: 10%.