

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

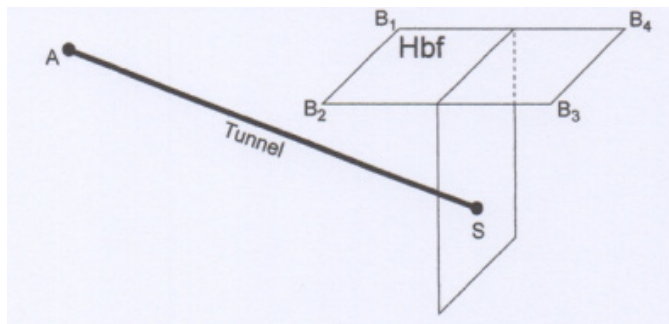
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1 Die Grundfläche eines Hauptbahnhofs (Hbf) wird durch ein Viereck mit den Eckpunkten $B_1(0|1|0)$, $B_2(3|0|0)$, $B_3(5|6|0)$ und $B_4(2|7|0)$ modelliert. Ein Tunnel startet im Punkt $A(0|-11|0)$ und endet im Punkt $S(2,5|3,5|-0,5)$. Eine Längeneinheit entspricht 100 Meter (m). Die Modellierung ist in der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Skizzen veranschaulicht.



- 1.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche des Hbf ein Rechteck ist. Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche in Quadratkilometer. (4 Punkte)
- 1.2 Der Tunnel von A nach S wird modelliert durch die Strecke g mit
- $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}; \quad 0 \leq r \leq 1.$$
- 1.2.1 Der Tunnel schließt mit der Ebene, in der die Grundfläche des Hbf liegt, einen Winkel ein. Berechnen Sie diesen Winkel. (2 Punkte)
- 1.2.2 Untersuchen Sie, ob für jeden Punkt des Tunnels der Sicherheitsabstand von mindestens 20 Meter zur Seite $\overline{B_1B_2}$ der Grundfläche des Hbf eingehalten wird. (4 Punkte)
- 1.3 Eine Ebene E besitzt die Darstellung $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 13$.
- 1.3.1 Prüfen Sie, ob der Punkt S in der Ebene E liegt. (1 Punkt)
- 1.3.2 Geben Sie eine Gleichung der Geraden k durch A an, die orthogonal zu E ist.
- Zur Planung eines weiteren Tunnels möchte man wissen, wo sich der Punkt $A' (\neq A)$ auf k befindet, der denselben Abstand zu E hat wie der Punkt A. Bestimmen Sie die Koordinaten von A' . (4 Punkte)

Lösungen

1.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche des Hbf ein Rechteck ist.

Zunächst zeigt man, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{B_2B_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{B_1B_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren gleich sind, liegt ein Parallelogramm vor.

Nun muss noch geprüft werden, ob das Viereck rechtwinklig ist.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{B_2B_3} \cdot \overrightarrow{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 6 + 0 = 0$$

Damit ist gezeigt, dass das Viereck $B_1B_2B_3B_4$ ein Rechteck ist.

Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche in Quadratkilometer.

$$\text{Es gilt } |\overrightarrow{B_2B_3}| = \sqrt{4 + 36 + 0} = \sqrt{40} \text{ und } |\overrightarrow{B_2B_1}| = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Es gilt } A = \sqrt{10} \cdot \sqrt{40} = 20$$

Der Flächeninhalt beträgt $20 \cdot 10000\text{m}^2 = 200.000\text{m}^2 = 0,2\text{km}^2$

1.2.1 Berechnen Sie diesen Winkel.

Die Grundfläche des Hbf ist die x_1x_2 -Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Winkel zwischen dieser Ebene und der Gerade g:

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0,5}{\sqrt{216,75}} \Rightarrow \alpha \approx 1,95^\circ$$

1.2.2 Untersuchen Sie, ob für jeden Punkt des Tunnels der Sicherheitsabstand von mindestens 20 Meter zur Seite $\overline{B_1B_2}$ der Grundfläche des Hbf eingehalten wird.

Die Strecke B_1B_2 liegt auf der Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Man berechnet nun den Abstand zwischen der Gerade h und der Gerade g.

Die Geraden g und h sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren keine Vielfachen sind.

Prüfung, ob g und h windschief sind oder sich schneiden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Aus der 3. Zeile folgt: $r = 0$

Aus der 1. Zeile folgt dann: $s = 0$

Aus der 2. Zeile folgt dann: $1 = -11$ also eine falsche Aussage.

g und h sind also windschief.

Formel für den Abstand der beiden windschiefen Geraden: $d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ (Merkhilfe)

Es ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 46 \end{pmatrix}$

Es gilt $|\vec{n}| = \sqrt{0,5^2 + 1,5^2 + 46^2} = \sqrt{2118,5}$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 46 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2118,5}} \approx \frac{1}{46,027} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 46 \end{pmatrix} = 0,39107 = 39 \text{ Meter}$$

Der Sicherheitsabstand wird eingehalten, da schon der Abstand d der (windschiefen) Geraden g und h größer als 20 Meter ist.

1.3.1 Prüfen Sie, ob der Punkt S in der Ebene E liegt.

Koordinatengleichung von E: $x_1 + 3x_2 = 13$

Einsetzen von S in E: $2,5 + 3 \cdot 3,5 = 13$ ist eine wahre Aussage

Der Punkt S liegt auf der Ebene.

1.3.2 *Geben Sie eine Gleichung der Geraden k durch A an, die orthogonal zu E ist.*

Der Richtungsvektor von k entspricht dem Normalenvektor von E .

$$\text{Gerade } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten von A' .

Zunächst wird der Schnittpunkt von k mit der Ebene E berechnet:

$$t + 3(-11 + 3t) = 13 \Rightarrow 10t = 46 \Rightarrow t = 4,6$$

Einsetzen von $t = 4,6$ in k ergibt den Schnittpunkt $S(4,6 | 2,8 | 0)$.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4,6 \\ 13,8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ 16,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt A' hat die Koordinaten $A'(9,2|16,6|0)$.