

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Teil 3 (mit Hilfsmittel)

Stochastik

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Stochastik

- 1 In Baden-Württemberg tragen 3,5% aller Zecken FSME-Viren in sich. Diese Viren werden durch Bisse der Zecken auf den Menschen übertragen.

- 1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1 : Von 20 zufällig ausgewählten Zecken trägt keine einzige FSME-Viren in sich.

E_2 : Von 50 zufällig ausgewählten Zecken trägt höchstens eine FSME-Viren in sich.

E_3 : Von 100 zufällig ausgewählten Zecken tragen mindestens vier FSME-Viren in sich.

(6 Punkte)

- 1.2 Prüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist: Das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen übersteigt in Baden-Württemberg erst dann 60%, wenn man dort von mindestens 25 Zecken gebissen wird.

(3 Punkte)

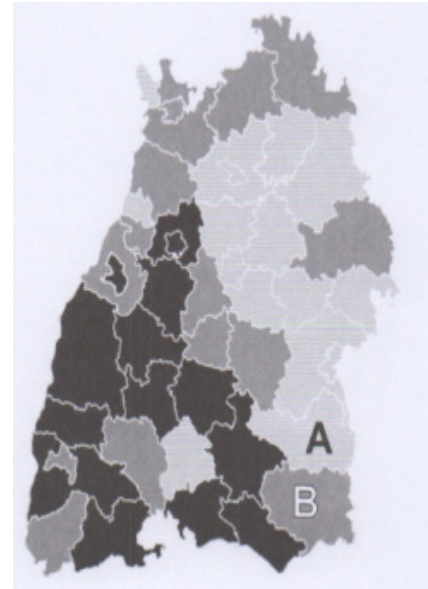
- 1.3

Die angegebene Wahrscheinlichkeit von 3,5% mit der die Zecke FSME-Viren in sich trägt, stellt einen Durchschnittswert für ganz Baden-Württemberg dar.

In allen Regionen wurden Stichproben genommen und die dortigen relativen Häufigkeiten berechnet. Je dunkler die Region in der Karte dargestellt ist, desto höher sind die relativen Häufigkeiten dafür, dass die Zecken FSME-Viren in sich tragen.

Für die Regionen A und B wurde jeweils ein 95%-Vertrauensintervall für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten, mit der eine Zecke dort FSME-Viren in sich trägt, bestimmt.

Für die Stichprobe in der Region A ist bekannt, dass 2000 Zecken getestet wurden.



- 1.3.1 Bei der Stichprobe in der Region A stellte man fest, dass 58 Zecken FSME-Viren in sich tragen. Geben Sie das näherungsweise bestimmte 95%-Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit an.

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3 Punkte)

- 1.3.2 Bei der Prüfung der Stichproben wird festgestellt, dass die Längen der Vertrauensintervalle für die beiden Regionen A und B übereinstimmen, in Region B jedoch eine größere relative Häufigkeit als in Region A vorliegt (siehe Karte). Erläutern Sie, was dies für den Umfang der Stichprobe in Region B bedeutet.

(3 Punkte)

Lösungen**1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.**

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Zecken, die FSME-Viren in sich tragen.

E_1 : X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,035$.

$$P(E_1) = P(X = 0) \approx 0,490$$

E_2 : X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0,035$.

$$P(E_2) = P(X \leq 1) \approx 0,474$$

E_3 : X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,035$.

$$P(E_3) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,465$$

1.2 Prüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist: Das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen übersteigt in Baden-Württemberg erst dann 60%, wenn man dort von mindestens 25 Zecken gebissen wird.

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Zecken, die FSME-Viren in sich tragen.
 X ist binomialverteilt mit $n = 25$ und $p = 0,035$.

Die Viren übertragen sich auf den Menschen, wenn mindestens eine der 25 Zecken die Viren in sich trägt.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,59$$

Die Aussage ist nicht wahr, da bei genau 25 Zeckenbissen 60% noch nicht erreicht sind.

1.3.1 Geben Sie das näherungsweise bestimmte 95%-Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit an.

Der Test besteht aus einer Stichprobe mit einem Umfang von $n = 2000$.

Die relative Häufigkeit beträgt $h = \frac{58}{2000} = 0,029$

Aufgrund des Sicherheitsniveaus ist $c = 1,96$.

$$\text{Vertrauensintervall: } \left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$$

$$\left[0,029 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,029 \cdot 0,971}{2000}}; 0,029 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,029 \cdot 0,971}{2000}} \right] \Rightarrow [0,0216; 0,0364]$$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von etwa 95% liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke in Region A FSME-Viren in sich trägt im Intervall $[0,0216; 0,0364]$.

1.3.2 Erläutern Sie, was dies für den Umfang der Stichprobe in Region B bedeutet.

Die Länge L des Vertrauensintervalls beträgt $L = 2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$

Wenn in Region B h größer ist, wird auch der Term $h \cdot (1-h)$ größer.

Begründung:

Die Funktion $g(h) = h \cdot (1-h) = h - h^2$ ist das Schaubild einer nach unten geöffneten Parabel.

Scheitelpunkt der Funktion g : $g'(h) = 1 - 2h$

$$g'(h) = 0 \Rightarrow 1 - 2h = 0 \Rightarrow h = 0,5$$

Für $0 < h < 0,5$ ist die Funktion $g(h)$ streng monoton wachsend.

Da die Länge L gleich bleibt, muss der Nenner des Bruches unter der Wurzel wachsen, wenn der Zähler größer wird.

In der Region B wurden daher mehr als 2000 Zecken untersucht.