

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2018

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

4.1 (8 Punkte)

Gegeben ist das Schaubild K_h einer trigonometrischen Funktion h .

Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

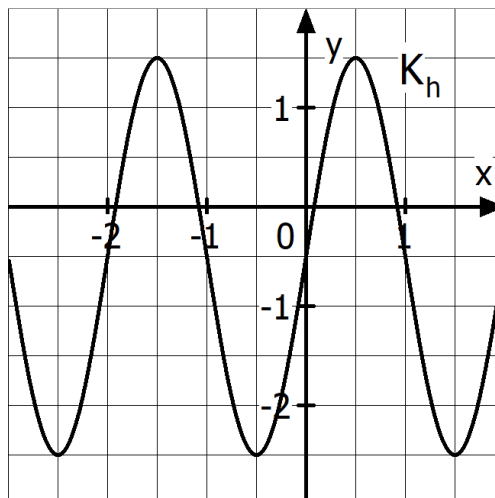
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $h(-2,25) < 0$

b) $h'(-2,25) < 0$

c) $h''(-2,25) < 0$

d) $\int_{-2,25}^0 h(x) dx < 0$



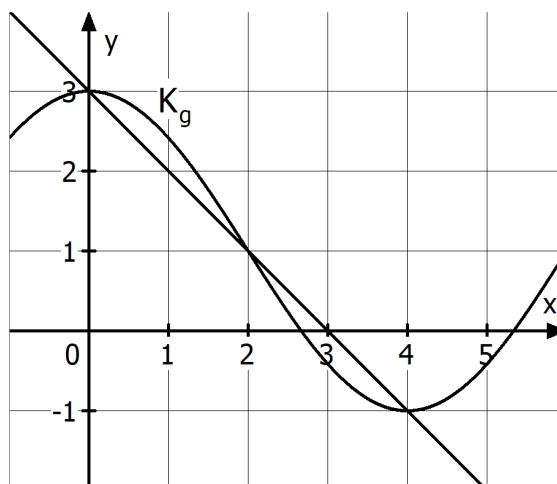
4.2 (6 Punkte)

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer trigonometrischen Funktion g mit dem Hochpunkt $H(0/3)$ und dem Tiefpunkt $T(4/-1)$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von g an.

Die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 3$ verläuft durch die Punkte H und T .

Begründen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\int_0^4 (g(x) - (-x + 3)) dx = 0$$



Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K .

4.3 (13 Punkte)

Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f und der x -Achse.

Zeichnen Sie K_f für $-2,5 \leq x \leq 2,5$.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f .

4.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung der Stammfunktion von f , deren Schaubild durch den Punkt $P(1/1)$ geht.

Lösung

4.1

- a) Die Aussage ist wahr. Der Punkt an der Stelle $x = -2,25$ liegt unterhalb der x-Achse.
- b) Die Aussage ist falsch. Es gilt $h'(-2,25) > 0$, da an der Stelle $x = -2,25$ die Steigung der Tangente positiv ist.
- c) Die Aussage ist falsch. Es gilt $h''(-2,25) > 0$, da an der Stelle $x = -2,25$ das Schaubild linksgekrümmt ist.
- d) Die Aussage ist wahr. Die Flächenstücke oberhalb der x-Achse sind im Intervall $-2,25 \leq x \leq 0$ kleiner als die Flächenstücke unterhalb der x-Achse.

4.2

Da der Hochpunkt auf der y-Achse liegt, handelt es sich um eine (nicht nach links oder rechts verschobene) Kosinusfunktion.

Allgemeiner Ansatz: $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + d$

Verschiebung nach oben: $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$

Amplitude: $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$

Die Periode beträgt $p = 8$, daraus folgt $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Funktionsgleichung: $g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$

Begründung, dass das Integral den Wert 0 ergibt:

Die Gerade schneidet K_g in den beiden Extrempunkten und im Wendepunkt.

Das Schaubild der trigonometrischen Funktion ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt. Die beiden Flächenstücke haben somit den gleichen Inhalt, sind jedoch unterschiedlich orientiert. Der Wert des Integrals ist damit 0.

4.3

Das Schaubild K_f ist symmetrisch zur y-Achse, da die Funktionsgleichung aus lauter geraden Hochzahlen besteht.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

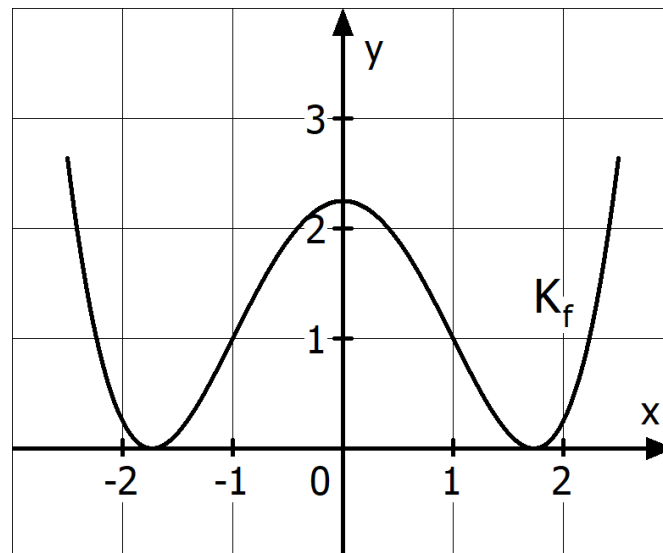
$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = u$$

$$\frac{1}{4}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{-3}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1,5 \pm \sqrt{0}}{0,5} \Rightarrow u_{1,2} = 3$$

Rücksubstitution: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-\sqrt{3}/0)$ und $N_2(\sqrt{3}/0)$

Zeichnung:



Ableitungen von $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = x^3 - 3x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'''(x) = 6x$$

Krümmungsverhalten von K_f :

Zur Ermittlung des Krümmungsverhaltens benötigt man die Wendestellen von K_f :

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'''(1) = 6 \neq 0, \text{ also Wendestelle bei } x = 1$$

$$f'''(-1) \neq 0, \text{ also Wendestelle bei } x = -1$$

An den Wendestellen ändert sich die Krümmung des Schaubildes.

Aus dem Schaubild ist ablesbar:

Für $x < -1$ ist das Schaubild linksgekrümmt.

Für $-1 < x < 1$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt.

Für $x > 1$ ist das Schaubild linksgekrümmt.

4.4

$$\text{Stammfunktion: } F(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x + C$$

$$\text{Mit } F(1) = 1 \text{ folgt: } 1 = \frac{1}{20} \cdot 1^5 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{9}{4} \cdot 1 + C \Rightarrow C = -0,8$$

$$\text{Gesuchte Stammfunktion: } F(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x - 0,8$$