Hauptprüfung Fachhochschulreife 2018

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Gegeben sind die Funktionen f und g mit
$f(x) = -2e^{-0,5x} + 3$; $g(x) = -2\sin(0,5x) + 3$; $x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von f ist K_f , das Schaubild von g ist K_g .

3.1 (9 Punkte)
Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f .
Zeigen Sie, dass K_f keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.
Zeichnen Sie K_f für $-2 \le x \le 6$.

3.2 (6 Punkte)
Begründen Sie, dass K_f und K_g unendlich viele Schnittpunkte haben.
Das Schaubild K_f wird so verschoben, dass es keine gemeinsamen Punkte mit K_g hat.
Geben Sie einen passenden Funktionsterm an.

Kann K_f so verschoben werden, dass es K_g in einem Tiefpunkt berührt?

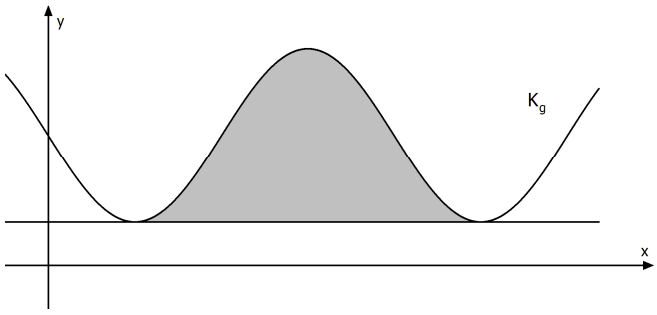
3.3 (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Punkt $W(2\pi / 3)$ Wendepunkt von K_g ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in W.

3.4 (8 Punkte)
Johanna soll den Inhalt in der Zeichnung schraffierten Fläche berechnen.
Nur einen der Ansätze a) bis c) liefert das richtige Ergebnis.
Nennen Sie je ein Argument, warum die anderen beiden Ansätze falsch sind.

a) $\int_{\pi}^{5\pi} (-2\sin(0,5x) + 3)dx$

b) $\int_{\pi}^{5\pi} (-2\sin(0,5x) + 2)dx$

c) $\int_{\pi}^{3\pi} (-2\sin(0,5x) + 3 - 1)dx$



Berechnen Sie den gesuchten Flächeninhalt.

Lösung

3.1
Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -2 \cdot e^0 + 3 = 1$, also $S_y(0/1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$-2e^{-0,5x} + 3 = 0 \Rightarrow e^{-0,5x} = 1,5 \Rightarrow x = \frac{\ln(1,5)}{-0,5} \approx -0,81 \text{ , also } N(-0,81/0)$$

Ableitungen von f(x):

$f(x) = -2e^{-0,5x} + 3$

$f'(x) = -2 \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} = e^{-0,5x}$

$f''(x) = -0,5e^{-0,5x}$

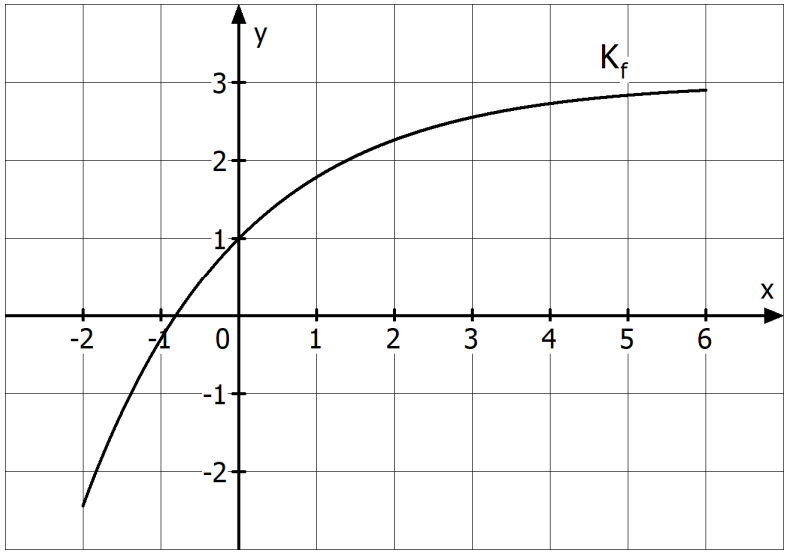
Extrempunkte:
Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$e^{-0,5x} = 0$ ist nicht lösbar, daher existieren keine Extrempunkte

Wendepunkte:
Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$-0,5e^{-0,5x} = 0$ ist nicht lösbar, daher existieren keine Wendepunkte

Zeichnung (mit Hilfe der Achsenschnittpunkte und der WTR-Wertetabelle)



3.2
Begründung der unendlich vielen Schnittpunkte:

Das Schaubild K_g ist periodisch und nimmt y-Werte im Bereich $1 \leq y \leq 5$ an.

Das Schaubild K_f besitzt für $x \to +\infty$ die waagrechte Asymptote y = 3.

Daher schneiden sich die beiden Schaubilder für x > 0 unendlich oft.

Verschiebung von K_f :

Das Schaubild K_g nimmt y-Werte im Bereich $1 \le y \le 5$ an.

Das Schaubild K_f muss so nach unten verschoben werden, dass die waagrechte Asymptote höchstens auf der Höhe y = 1 liegt.

Beispiel: $f_{neu}(x) = -2e^{-0,5x} + 1$

Hinweis: Es ist auch jede andere Funktion $f_{neu}(x) = -2e^{-0,5x} + c$ möglich mit $c \le 1$.

Berühren im Tiefpunkt von K_g :

Eine Berührung liegt vor, wenn die beiden Schaubilder einen gemeinsamen Punkt mit einer gemeinsamen Tangente besitzen.

Bei einer Berührung im Tiefpunkt (der eine waagrechte Tangente besitzt), müsste auch K_f eine waagrechte Tangente besitzen.

Da $f'(x) = e^{-0,5x} \neq 0$ ist, besitzt K_f keine waagrechte Tangente. Und auch eine Verschiebung von K_f führt nicht dazu, dass eine waagrechte Tangente existiert.

Eine solche Verschiebung ist also nicht möglich.

3.3

Ableitungen von g(x):

$$g(x) = -2\sin(0,5x) + 3$$
$$g'(x) = -2\cos(0,5x) \cdot 0,5 = -\cos(0,5x)$$
$$g''(x) = \sin(0,5x) \cdot 0,5 = 0,5\sin(0,5x)$$
$$g'''(x) = 0,5\cos(0,5x) \cdot 0,5 = 0,25\cos(0,5x)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkt bei $x = 2\pi$:

$g''(2\pi) = 0$ und $g'''(2\pi) \neq 0$

$g''(2\pi) = 0,5\sin(0,5 \cdot 2\pi) = 0,5\sin(\pi) = 0$ ist erfüllt

$g'''(2\pi) = 0,25\cos(0,5 \cdot 2\pi) = 0,25\cos(\pi) = -0,25 \neq 0$ ist erfüllt

Es gilt $g(2\pi) = -2\sin(\pi) + 3 = 3$

Damit ist gezeigt, dass $W(2\pi / 3)$ Wendepunkt von K_g ist.

Tangentengleichung in W:

Ansatz: $y = m \cdot x + b$

Tangentensteigung: $g'(2\pi) = -\cos(0,5 \cdot 2\pi) = -\cos(\pi) = 1$

Einsetzen von W und der Steigung in die Tangentengleichung:

$3 = 1 \cdot 2\pi + b \Rightarrow b = 3 - 2\pi \approx -3,28$

Gleichung der Tangente: $y = x - 3,28$

3.4

Die Periode der Funktion g(x) beträgt $p = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$

Da die linke und rechte Grenze der Fläche jeweils ein Tiefpunkt ist, muss über ein Intervall der Länge 4π integriert werden. Damit kommt c) nicht in Frage.

Da die Fläche nach oben und unten durch K_g und die Gerade y = 1 begrenzt wird, muss über die Funktion $g(x) - 1 = -2\sin(0,5x) + 3 - 1 = -2\sin(0,5x) + 2$ integriert werden.

Damit kommt a) nicht in Frage, da hier die untere Grenze y = 1 nicht berücksichtigt wurde.
Nur der Ansatz b) ist korrekt.

$$A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2\sin(0,5x) + 2)dx = \left[2\cos(0,5x) \cdot \frac{1}{0,5} + 2x \right]_{\pi}^{5\pi}$$
$$= 2\cos(2,5\pi) \cdot \frac{1}{0,5} + 2 \cdot 5\pi - \left(2\cos(0,5\pi) \cdot \frac{1}{0,5} + 2\pi \right)$$
$$= 10\pi - 2\pi = 8\pi \approx 25,13 \text{ FE}$$