

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2018

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

2.1 (9 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit der x -Achse und der Extrempunkte von K_f .

Zeichnen Sie K_f für $-1 \leq x \leq 3,5$.

2.2 (5 Punkte)

Berechnen Sie $\int_0^3 -f(x)dx$.

Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt mit diesem Ausdruck berechnet wird, in Ihrem Schaubild aus Aufgabe 2.1.

2.3 (6 Punkte)

Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind:

- a) Jede Polynomfunktion vierten Grades besitzt eine Nullstelle.
- b) Jede Nullstelle einer Funktion ist Extremstelle ihrer Stammfunktion.
- c) Das Schaubild jeder Polynomfunktion dritten Grades besitzt sowohl einen Hoch- als auch einen Tiefpunkt.

Die Einwohnerzahl eines Landes wächst entsprechend der Funktion g mit

$$g(t) = a \cdot e^{b \cdot t} \text{ mit } t \in \mathbb{R}, a, b \neq 0.$$

Dabei ist t die Zeit in Jahren, $t = 0$ ist das Jahr 2016 und $g(t)$ gibt die Einwohnerzahl des Landes in Millionen zum Zeitpunkt t an.

Im Jahr 2016 lebten 120 Millionen Menschen in dem Land, im Jahr 2018 sind es 126 Millionen Menschen.

2.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Werte für a und b .

Im Folgenden sei $a = 120$ und $b = 0,025$.

2.5 (4 Punkte)

Bestimmen sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2033.

In welchem Jahr war unter diesen Vorgaben die Bevölkerungszahl halb so groß wie im Jahr 2016?

2.6 (3 Punkte)

Bestimmen Sie, um wieviel Prozent die Einwohnerzahl jährlich zunimmt.

Lösung

2.1

Gemeinsame Punkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x - 3) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Somit sind $N_1(0/0)$ und $N_2(3/0)$ die Schnittpunkte mit der x-Achse.

Ableitungen:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

Extrempunkte:

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x - 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(0/f(0))$$

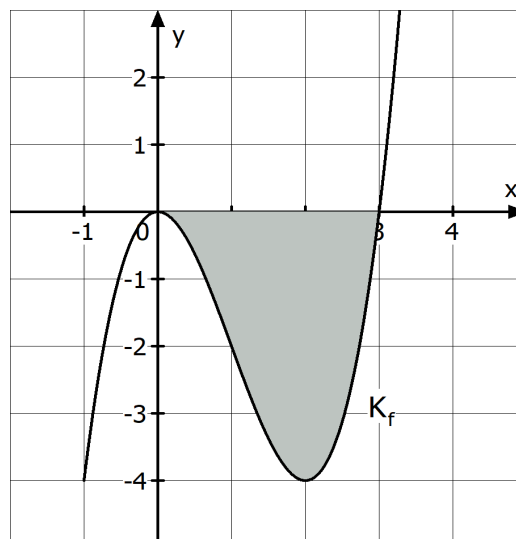
Mit $f(0) = 0$ folgt Hochpunkt $H(0/0)$.

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt } T(2/f(2))$$

Mit $f(2) = -4$ folgt Tiefpunkt $T(2/-4)$.

Zeichnung (mit Hilfe der berechneten Punkte):

Die markierte Fläche stammt aus der Teilaufgabe 2.2.



2.2

$$\int_0^3 -f(x)dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{4} + 27 = 6,75$$

Die Fläche ist bereits im Schaubild in 2.1 markiert.

2.3

- a) Die Aussage ist falsch. Die Funktion $f(x) = x^4 + 1$ besitzt keine Nullstelle.
- b) Die Aussage ist falsch. Wenn eine Stammfunktion $F(x)$ eine Extremstelle besitzt, hat die Ableitungsfunktion $f(x)$ dort eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
Die Funktion $f(x) = x^2$ besitzt eine Nullstelle $x = 0$ ohne Vorzeichenwechsel.
Somit hat die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ an der Stelle $x = 0$ keine Extremstelle (sondern einen Sattelpunkt).
- c) Die Aussage ist falsch. Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt einen Sattelpunkt bei $(0/0)$ und hat keine Extrempunkte.

2.4

Funktionsansatz: $g(t) = a \cdot e^{bt}$

Folgende Bedingungen sind bekannt:

$$120 \text{ Mio. Menschen bei } t = 0: g(0) = 120 \Rightarrow a \cdot e^{b \cdot 0} = 120 \Rightarrow a = 120$$

$$126 \text{ Mio. Menschen bei } t = 2: g(2) = 126 \Rightarrow 120 \cdot e^{b \cdot 2} = 126$$

$$\Rightarrow 2b = \ln \frac{126}{120} \Rightarrow b \approx 0,0244$$

2.5

Die Funktionsgleichung lautet nun $g(t) = 120 \cdot e^{0,025 \cdot t}$ (t = Zeit in Jahren seit 2016)

Bevölkerungszahl im Jahr 2033: $g(17) = 120 \cdot e^{0,025 \cdot 17} = 183,55$ Mio. Menschen

Zeitpunkt, zu dem die Bevölkerung aus $120 : 2 = 60$ Mio. Menschen bestand:

$$60 = 120 \cdot e^{0,025 \cdot t} \Rightarrow 0,5 = e^{0,025 \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{0,025} \approx -27,7$$

Ca. 28 Jahre vor dem Jahr 2016 (also ca. im Jahr 1988) bestand die Bevölkerung aus halb so vielen Menschen wie in 2016.

2.6

Es handelt sich hierbei um ein exponentielles Wachstum, das in jedem Jahr um denselben Prozentsatz wächst.

Bevölkerungszahl im Jahr 2016: $g(0) = 120$ Mio.

Bevölkerungszahl im Jahr 2017: $g(1) = 120 \cdot e^{0,025} \approx 123,04$ Mio. Menschen

Prozentualer Zuwachs pro Jahr: $\frac{120 \cdot e^{0,025}}{120} = e^{0,025} \approx 1,0253$

Dies entspricht einem jährlichen Zuwachs von 2,53%.