

Hauptprüfung Abiturprüfung 2018

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 1 In einer Simulation wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Heimspiele einer Fußballmannschaft regelmäßig von jeweils genau 50.000 Zuschauern besucht werden. Die Zuschauer reisen ausschließlich mit dem Auto (A), mit dem Bus bzw. der Bahn (B) oder zu Fuß bzw. dem Fahrrad (F) an. Mit einem Auto können mehrere Zuschauer befördert werden. Die Zuschauer bilden also hinsichtlich der Anreise drei verschiedene Typen. In der Simulation gilt das folgende Wechselverhalten der Zuschauertypen von einem Spieltag zum nächsten:

- Von A wechseln 25% zu B.
- Von B wechseln 5% zu F und 20% zu A.
- Von F wechseln jeweils 10% zu A und zu B.

Die restlichen Zuschauer wechseln nicht.

- 1.1 Stellen Sie dieses Wechselverhalten in einem Übergangsdiagramm dar. Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen.

(5 Punkte)

- 1.2 Bestimmen Sie die prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern.

(4 Punkte)

- 1.3 Nun geht man in der Simulation davon aus, dass am zweiten Heimspieltag 27.000 Zuschauer vom Typ B und 3.000 Zuschauer vom Typ F kommen. Pro Auto reisen zudem immer durchschnittlich 2,5 Zuschauer an.

- 1.3.1 Zeigen Sie, dass hierbei 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichen würden.

(3 Punkte)

- 1.3.2 In der Simulation wird nun das Wechselverhalten der Autofahrer nach dem zweiten Heimspieltag so angepasst, dass die 8000 Parkplätze am dritten Heimspieltag genau ausreichen. Das Wechselverhalten der anderen Zuschauertypen B und F ändert sich dabei nicht.

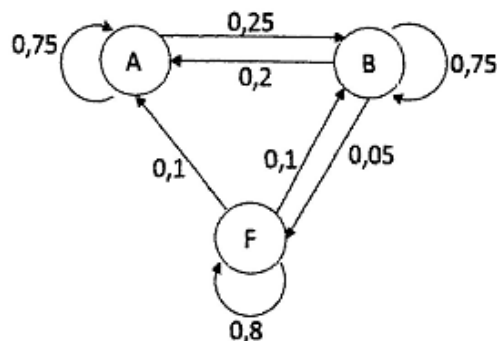
Ermitteln Sie den veränderten Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die dann wieder mit dem Auto kommen.

(3 Punkte)

Lösungen

- 1.1 Stellen Sie dieses Wechselverhalten in einem Übergangsdiagramm dar.

Übergangsdiagramm:



Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen.

Übergangsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$

Die Anfangsverteilung lautet $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix}$.

$$M \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 40000 \end{pmatrix}$$

Wenn am ersten Heimspieltag alle 50.000 Zuschauer zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad kommen, so wären nach dem Modell beim zweiten Heimspieltag jeweils 5000 Zuschauer mit dem Auto bzw. Bus und Bahn gekommen und 40.000 wiederum zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad.

- 1.2 Bestimmen Sie die prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern.

Berechnung des Stabilitätsvektors:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$0,75x + 0,2y + 0,1 \cdot (1 - x - y) = x$$

$$0,25x + 0,75y + 0,1 \cdot (1 - x - y) = y$$

$$0,05y + 0,8 \cdot (1 - x - y) = 1 - x - y$$

$$-0,35x + 0,1y = -0,1 \quad | \cdot 100$$

$$0,15x - 0,35y = -0,1 \quad | \cdot 100$$

$$0,2x + 0,25y = 0,2 \quad | \cdot 100$$

$$-35x + 10y = -10 \quad | : 5$$

$$15x - 35y = -10 \quad | : 5$$

$$20x + 25y = 20 \quad | : 5$$

$$-7x + 2y = -2 \quad (1)$$

$$3x - 7y = -2 \quad (2)$$

$$4x + 5y = 4 \quad (3)$$

$$(1) \quad -7x + 2y = -2$$

$$3 \cdot (1) + 7 \cdot (2) \quad -43y = -20$$

$$4 \cdot (1) + 7 \cdot (3) \quad 43y = 20$$

Aus der 2. und 3. Zeile folgt: $y = \frac{20}{43} \approx 0,465$

Aus der 1. Zeile folgt: $-7x + 2 \cdot \frac{20}{43} = -2 \Rightarrow -7x = -\frac{126}{43} \Rightarrow x = \frac{18}{43} \approx 0,419$

Der dritte Eintrag des Stabilitätsvektors lautet $1 - \frac{18}{43} - \frac{20}{43} = \frac{5}{43} \approx 0,116$

Mit dem Auto kommen etwa 41,9%, mit dem Bus bzw. der Bahn etwa 46,5% und zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad etwa 11,6% der Zuschauer.

- 1.3.1 Zeigen Sie, dass hierbei 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichen würden.

Am zweiten Heimspieltag sind es

27.000 Zuschauer vom Typ B

3.000 Zuschauer vom Typ F

$50.000 - 27.000 - 3.000 = 20.000$ Zuschauer vom Typ A

Verteilungsvektor am zweiten Heimspieltag: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_3 = M \cdot \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20700 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Am dritten Heimspieltag ist mit 20700 Zuschauern zu rechnen, die mit dem Auto kommen.

Dies entspricht $\frac{20700}{2,5} = 8280$ Parkplätzen

Die Anzahl der benötigten Parkplätze ist 8280 und damit größer als 8000.

- 1.3.2 *Ermitteln Sie den veränderten Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die dann wieder mit dem Auto kommen.*

8000 Parkplätze reichen aus, wenn $2,5 \cdot 8000 = 20.000$ Zuschauer mit dem Auto kommen.

$$\vec{x}_3 = M \cdot \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} a & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Es soll gelten: $20000 \cdot a + 27000 \cdot 0,2 + 3000 \cdot 0,1 = 20000$

$$\Rightarrow 20000a + 5700 = 20000$$

$$\Rightarrow a = \frac{14300}{20000} = 0,715$$

71,5% der Zuschauer, die am zweiten Heimspieltag mit dem Auto gekommen waren, kommen dann am dritten Heimspieltag wieder mit dem Auto.