

Hauptprüfung Abiturprüfung 2018

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1 Ein Flugzeug fliegt auf seiner Route über zwei verschiedene Länder hinweg. Ein Abschnitt der Flugroute kann modellhaft dargestellt werden durch g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix}; \quad 0 \leq t \leq 20$$

wobei t die Zeit in Minuten ist.

Zu Beginn ($t = 0$) befindet sich das Flugzeug am Punkt $P(-20 | -60 | 11)$.

Die x_3 -Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

Die Längeneinheit ist Kilometer (km). Die Luftraumgrenze der Länder wird durch die Ebene E mit $E: 3x_1 + 2x_2 = 0$ modelliert.

- 1.1 Bestimmen Sie den Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.
Begründen Sie, dass die Flughöhe in diesem Abschnitt ständig abnimmt.
(4 Punkte)

- 1.2 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Zu Beginn beträgt der minimale Abstand des Flugzeugs zur Luftraumgrenze der Länder weniger als 50 Kilometer.“
(4 Punkte)

- 1.3 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt.
Bestimmen Sie die Höhe, in der sich das Flugzeug dann befindet.
(3 Punkte)

- 1.4 Ein anderes Flugzeug ist gleichzeitig auf einer anderen Route unterwegs.
Diese Route wird durch h mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -56 \\ 8,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -0,25 \end{pmatrix}; \quad 0 \leq t \leq 20,$$

modelliert. Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge zueinander innerhalb des zwanzigminütigen Flugabschnitts.

(4 Punkte)

Lösungen

1.1 Bestimmen Sie den Ort des Flugzeugs fünf Minuten nach Beginn.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -30 \\ 8,5 \end{pmatrix}$$

Nach 5 Minuten befindet sich das Flugzeug im Punkt Q(-10 | -30 | 8,5).

Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.

1.Möglichkeit: Berechne den Abstand von Startpunkt P zu Q.

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10^2 + 30^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{1006,25} = 31,72 \text{ km}$$

Da diese Strecke in 5 Minuten zurückgelegt wird, wird in 1 Stunde $31,72 \text{ km} \cdot 12 = 380,64 \text{ km}$ zurückgelegt.

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt ca. 380 km/h.

2.Möglichkeit: Berechne die Länge des Richtungsvektors von g.

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 36 + (-0,5)^2} = \sqrt{40,25} = 6,34$$

Die Länge des Richtungsvektors gibt an, wie viel km das Flugzeug pro Minute zurücklegt.

Pro Stunde legt das Flugzeug $6,34 \text{ km} \cdot 60 = 380,4 \text{ km}$ zurück.

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt ca. 380 km/h.

Begründen Sie, dass die Flughöhe in diesem Abschnitt ständig abnimmt.

Das Flugzeug befindet sich im Sinkflug, da die x_3 -Koordinate des Richtungsvektors negativ ist.

- 1.2 „Zu Beginn beträgt der minimale Abstand des Flugzeugs zur Luftraumgrenze der Länder weniger als 50 Kilometer.“

$$\text{HNF von E: } \frac{3x_1 + 2x_2}{\sqrt{9+4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x_1 + 2x_2}{\sqrt{13}} = 0$$

$$\text{Abstand von P zu E: } d(P,E) = \left| \frac{3 \cdot (-20) + 2 \cdot (-60)}{\sqrt{13}} \right| = \left| \frac{-180}{\sqrt{13}} \right| = 49,923 \text{ km}$$

Das Flugzeug ist damit zu Beginn weniger als 50 km von der Luftraumgrenze der Länder entfernt.

- 1.3 *Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder durchstößt.
Bestimmen Sie die Höhe, in der sich das Flugzeug dann befindet.*

$$\begin{aligned} E \cap g: & 3 \cdot (-20 + 2t) + 2 \cdot (-60 + 6t) = 0 \\ & \Rightarrow -60 + 6t - 120 + 12t = 0 \\ & \Rightarrow 18t - 180 = 0 \\ & \Rightarrow t = 10 \end{aligned}$$

$$\text{Einsetzen von } t = 10 \text{ in die Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \\ 11 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet S(0|0|6).

Der Schnittpunkt befindet sich in einer Höhe von 6 km.

**Nach 10 Minuten durchdringt das Flugzeug die Luftraumgrenze der Länder.
Dies geschieht in einer Höhe von 6 km.**

- 1.4 *Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der beiden Flugzeuge zueinander innerhalb des zwanzigminütigen Flugabschnitts.*

Allgemeiner Flugzeugpunkt auf der Geraden g: $G(-20 + 2t \mid -60 + 6t \mid 11 - 0,5t)$

Allgemeiner Flugzeugpunkt auf der Geraden h: $H(20 - 2t \mid -56 + 6t \mid 8,5 - 0,25t)$

Abstand von G und H:

$$\begin{aligned} |\overline{GH}| &= \left| \begin{pmatrix} 20 - 2t - (-20 + 2t) \\ -56 + 6t - (-60 + 6t) \\ 8,5 - 0,25t - (11 - 0,5t) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 40 - 4t \\ 4 \\ -2,5 + 0,25t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(40 - 4t)^2 + 4^2 + (-2,5 + 0,25t)^2} \\ &= \sqrt{1600 - 320t + 16t^2 + 16 + 0,0625t^2 - 1,25t + 6,25} = \sqrt{16,0625t^2 - 321,25t + 1622,25} \end{aligned}$$

Die Funktion $d(t) = \sqrt{16,0625t^2 - 321,25t + 1622,25}$ wird minimal, wenn der Term unter der Wurzel minimal wird.

Gesucht ist der Tiefpunkt von $g(t) = 16,0625t^2 - 321,25t + 1622,25$

Da das Schaubild von g eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt auf jeden Fall ein Tiefpunkt vor.

Es gilt: $g'(t) = 32,125t - 321,25$

Notwendige Bedingung: $g'(t) = 0$

$$32,125t - 321,25 = 0 \Rightarrow t = 10$$

Nach 10 Minuten ist der Abstand der Flugzeuge am kleinsten.

Es gilt $d(10) = \sqrt{16} = 4$

Der minimale Abstand beträgt 4 km.