

Hauptprüfung Abiturprüfung 2018

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

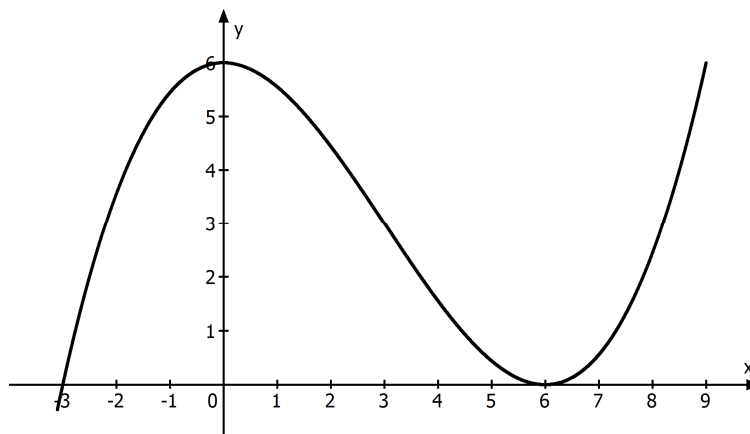
www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Analysis

- 1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K von f .



- 1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a , b und c , sodass gilt:
 $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2$; $x \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)
- 1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. (4 Punkte)
- 1.1.3 Das Schaubild K schließt mit der x -Achse eine Fläche A ein, die von der y -Achse in zwei Flächen unterteilt wird. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A . (4 Punkte)
- 1.1.4 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(0|6)$ an, die mit K
 (1) genau einen Punkt
 (2) genau drei Punkte
 gemeinsam hat.
- Die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ soll mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m . (6 Punkte)
- 1.2 Die Funktion g ist gegeben durch

$$g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t) dt \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$
 Gabi behauptet, dass die erste Ableitung der Funktion g wie folgt lautet:
 $g'(x) = \sin(2x^2 + 2) - \sin(2)$. Beurteilen Sie diese Behauptung. (3 Punkte)

Lösungen**1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a , b und c**

Die Funktion besitzt die einfache Nullstelle $x = -3$ und die doppelte Nullstelle $x = 6$.
Daraus folgt, dass $b = -3$ und $c = 6$.

$$\text{Es gilt } f(x) = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 6)^2$$

Der Punkt $A(0|6)$ liegt auf dem Schaubild von f .

$$f(0) = 6 \Rightarrow a \cdot (0 + 3) \cdot (0 - 6)^2 = 6 \Rightarrow 108a = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

Hinweis: Man hätte den Wert von $a = \frac{1}{18}$ auch anhand der gegebenen

Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + \dots$ ablesen können.

Es ist $a = \frac{1}{18}$ und $b = -3$ und $c = 6$.

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt.

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x \qquad f''(x) = \frac{1}{3}x - 1 \qquad f'''(x) = \frac{1}{3}$$

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f'''(3) = \frac{1}{3} \neq 0, \text{ also existiert ein Wendepunkt } W(3 | f(3))$$

$$\text{Es gilt } f(3) = 3.$$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(3|3)$.

Die erste Winkelhalbierende ist die Gerade $y = x$.

W liegt damit auf der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.

1.1.3 Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A .

Fläche zwischen der y -Achse und der Stelle $x = 6$:

$$A_1 = \int_0^6 \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 \right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x \right]_0^6 = \frac{1}{72} \cdot 1296 - \frac{1}{6} \cdot 216 + 36 - 0 = 18$$

Fläche zwischen der Stelle $x = -3$ und der y-Achse:

$$A_2 = \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 \right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x \right]_{-3}^0 = 0 - \left(\frac{1}{72} \cdot 81 - \frac{1}{6} \cdot (-27) - 18 \right) = 12,375$$

Die Gesamtfläche beträgt $A = 18 + 12,375 = 30,375$

$$\frac{A_2}{A} = \frac{12,375}{30,375} \approx 0,407$$

Der prozentuale Anteil der kleineren Fläche beträgt ca. 41%.

- 1.1.4 *Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt (0|6) an, die mit K (1) genau einen Punkt gemeinsam hat.*

Es gibt viele Lösungen.

Eine Gerade, die mit K nur den Punkt (0|6) gemeinsam hat, verläuft zum Beispiel noch durch den Punkt (2|0).

Diese Gerade hat die Steigung $m = \frac{6-0}{0-2} = -3$.

Eine mögliche Gerade ist $y = -3x + 6$

Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt (0|6) an, die mit K (2) genau drei Punkte gemeinsam hat.

Eine Gerade, die mit K drei Punkte gemeinsam hat, verläuft neben dem Punkt (0|6) noch durch den Punkt (-2|0).

Diese Gerade hat die Steigung $m = \frac{6-0}{0-(-2)} = 3$

Eine mögliche Gerade ist daher $y = 3x + 6$

Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m.

Schnitt der Gerade mit der Funktion $f(x)$:

$$\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 = mx + 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - mx = 0$$

Der Wert von m muss nun so bestimmt werden, dass diese Gleichung genau 2 Lösungen besitzt.

$$\Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m \right) = 0 \quad (*) \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x = 0$

$$\text{Gleichung II): } \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m = 0 \quad | \cdot 18 \quad \Rightarrow x^2 - 9x - 18m = 0$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot (-18m)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 72m}}{2}$$

Damit die Gleichung (*) genau zwei Lösungen besitzt, müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1: Aus der Gleichung II) darf nur eine Lösung entstehen

$$\text{Bedingung: } 81 + 72m = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{8}$$

Fall 2: In der Gleichung II) entstehen 2 Lösungen, aber eine Lösung ist $x = 0$ (also dieselbe Lösung wie aus Gleichung I)

$$\text{Bedingung: } \sqrt{81 + 72m} = 9 \xrightarrow{\text{quadrieren}} 81 + 72m = 81 \Rightarrow m = 0$$

Es gibt genau zwei Punkte, wenn $m = 0$ oder $m = -\frac{9}{8}$ ist.

1.2 *Beurteilen Sie diese Behauptung.*

$$g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t) dt = \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_1^{x^2+1} = -\frac{1}{2} \cos(2x^2 + 2) + \frac{1}{2} \cos(2)$$

$$\text{Daraus folgt } g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x^2 + 2)) \cdot 4x = 2x \cdot \sin(2x^2 + 2)$$

Die Behauptung von Gabi ist falsch.