

Hauptprüfung Abiturprüfung 2018

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

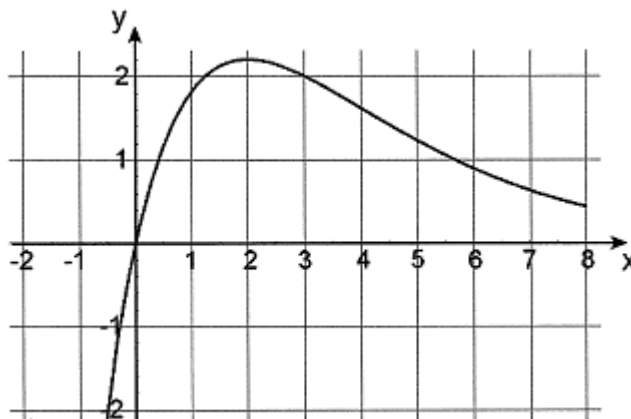
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Analysis

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f .



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

- (1) Es gilt: $f''(1) < 0$
- (2) Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0;3]$.
- (3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

(6 Punkte)

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g .

(1) $g(x) = (2x + 1)^2$

(2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$

(3 Punkte)

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$.

(3 Punkte)

1.3.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x) dx$.

(3 Punkte)

Stochastik

- 2 In der norwegischen Hauptstadt Oslo ist jeder zehnte Pkw ein Elektroauto.
- 2.1 Auf einem kommunalen Parkplatz in Oslo beträgt die Parkgebühr für Pkw fünf norwegische Kronen. Elektroautos parken kostenlos. Pro Tag wird der Parkplatz von 300 Pkw genutzt.
Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann. (2 Punkte)
- 2.2 Im Folgenden werden in Oslo zufällig vorbeifahrende Pkw betrachtet.
- 2.2.1 Drei Pkw fahren vorbei.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Unter diesen Pkw ist genau ein Elektroauto.
B: Unter diesen Pkw ist mindestens ein Elektroauto. (4 Punkte)
- 2.2.2 Definieren Sie die Zufallsvariable X und formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann:

$$P(X \leq 2) = 0,9^{100} + 100 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{98} \quad (2 \text{ Punkte})$$

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}$$

(3 Punkte)

3.2 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

(4 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}$$

(3 Punkte)

3.2 Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ – Matrizen invertierbar.
 E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrixgleichung
 $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$

nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(4 Punkte)

Lösungen**Analysis**1.1 (1) *Es gilt: $f''(1) < 0$*

Das Schaubild K_f ist im Punkt $(1/f(1))$ rechtsgekrümmt und daher ist die zweite Ableitung an der Stelle $x = 1$ negativ.

Die Aussage ist wahr.

(2) *Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0;3]$.*

Die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[0;3]$ ist $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$

Zeichnet man an der Stelle $x = 0$ eine Tangente an das Schaubild von f ein, ist die Steigung der Tangente größer als $\frac{2}{3}$.

Die Aussage ist falsch.

(3) *Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.*

Das Schaubild von f besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

Die Aussage ist wahr.

1.2 *Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g .*

$$(1) \quad g(x) = (2x + 1)^2$$

$$g'(x) = 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + 1) = 8x + 4$$

Man könnte die Klammer auch ausmultiplizieren und dann erst ableiten:

$$g(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

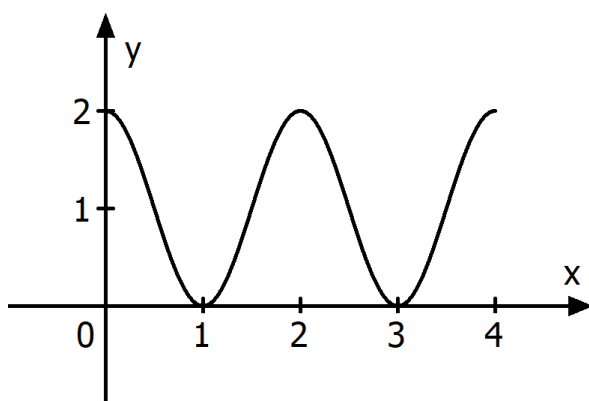
$$g'(x) = 8x + 4$$

$$(2) \quad g(x) = (x + 1) \cdot e^x$$

$$g'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x + 1) = e^x \cdot (x + 2)$$

1.3.1 *Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$.*

Die Funktion $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ und ist gegenüber der Kosinusfunktion um 1 Einheit nach oben verschoben.



$$\begin{aligned} 1.3.2 \quad \int_0^2 h(x) dx &= \int_0^2 (\cos(\pi \cdot x) + 1) dx = \left[\sin(\pi \cdot x) \cdot \frac{1}{\pi} + x \right]_0^2 = \sin(2\pi) \cdot \frac{1}{\pi} + 2 - (\sin(0) \cdot \frac{1}{\pi} + 0) \\ &= 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Stochastik

2.1 Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann.

X = Anzahl der Pkw, die kein Elektroauto sind
 X ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0,9$.

$$E(X) = n \cdot p = 300 \cdot 0,9 = 270$$

Es sind 270 Pkw zu erwarten, die jeweils 5 Kronen bezahlen müssen.

Die erwarteten Einnahmen sind $270 \cdot 5 = 1350$ Kronen

2.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Unter diesen Pkw ist genau ein Elektroauto.

B: Unter diesen Pkw ist mindestens ein Elektroauto.

X = Anzahl der Pkw, die ein Elektroauto sind

X ist binomialverteilt mit $n = 3$ und $p = \frac{1}{10}$

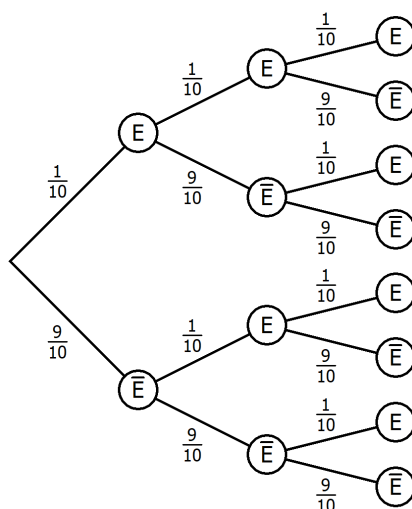
$$P(A) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{81}{100} = \frac{243}{1000}$$

$$P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

Die Wahrscheinlichkeit für A beträgt 0,243 bzw. 24,3%.

Die Wahrscheinlichkeit für B beträgt 0,271 bzw. 27,1%.

Man kann die Aufgabe auch mit einem Baumdiagramm lösen:



$$P(A) = P(\bar{E}\bar{E}\bar{E}, \bar{E}\bar{E}E, \bar{E}E\bar{E}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 3 = \frac{243}{1000}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{E}\bar{E}\bar{E}) = 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

**Die Wahrscheinlichkeit für A beträgt 0,243 bzw. 24,3%.
Die Wahrscheinlichkeit für B beträgt 0,271 bzw. 27,1%.**

2.2.2 *Definieren Sie die Zufallsvariable X und formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann.*

Aus dem Term ist erkennbar:

Es handelt sich um $n = 100$ Versuche.

Die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $p = 0,1$.

X = Anzahl der Elektroautos unter 100 zufällig vorbeifahrenden Pkw

Ereignis: Unter 100 zufällig vorbeifahrenden Pkw befinden sich höchstens zwei Elektroautos.

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & = 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} +$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & -3x_2 & +x_3 & = -5 \\ & 3x_2 & -x_3 & = 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} +$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & -3x_2 & +x_3 & = -5 \\ & 0 & = 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aus der 2. Zeile folgt: $-3t + x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = -5 + 3t$

Aus der 1. Zeile folgt: $x_1 + t + (-5 + 3t) = 4 \Rightarrow x_1 = 9 - 4t$

Lösungsmenge $L = \{(9 - 4t \mid t \mid -5 + 3t); t \in \mathbb{R}\}$ **bzw. Lösungsvektor** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 - 4t \\ t \\ -5 + 3t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

3.2 Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind.

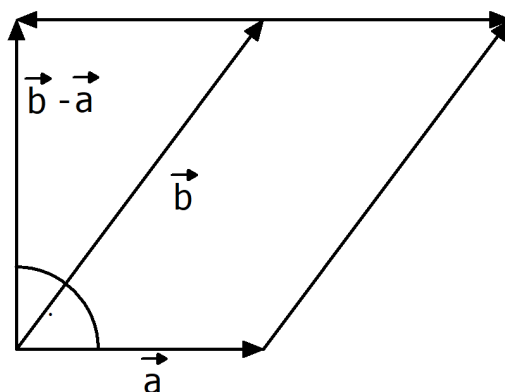
$$\text{Es gilt } \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nachweis der Orthogonalität: } \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$$

Da das Skalarprodukt 0 ergibt, sind die Vektoren zueinander orthogonal.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Skizze:



1. Möglichkeit: $A = g \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{0 + 4 + 0} \cdot \sqrt{9 + 0 + 16} = 2 \cdot 5 = 10$

2. Möglichkeit: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 0 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Die Fläche des Parallelogramms beträgt $A = 10$.

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 3 \\ & 3x_2 & -x_3 & = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & -3x_2 & +x_3 & = -5 \\ & 3x_2 & -x_3 & = 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & -3x_2 & +x_3 & = -5 \\ & 0 & = 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.

Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aus der 2. Zeile folgt: $-3t + x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = -5 + 3t$

Aus der 1. Zeile folgt: $x_1 + t + (-5 + 3t) = 4 \Rightarrow x_1 = 9 - 4t$

Lösungsmenge $L = \{(9 - 4t \mid t \mid -5 + 3t); t \in \mathbb{R}\}$ **bzw. Lösungsvektor** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 - 4t \\ t \\ -5 + 3t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

3.2 Lösen Sie die Matrixengleichung nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$$(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$$

$$B \cdot E - B \cdot A + A \cdot E - A^2 = X \cdot A - B \cdot A \quad | +B \cdot A$$

$$B + A - A^2 = X \cdot A \quad | \cdot A^{-1} \text{ von rechts}$$

$$B \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} - A^2 \cdot A^{-1} = X$$

$$X = B \cdot A^{-1} + E - A$$