

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2026
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis

1.1 (a) 4 BE b) 3 BE c) 4 BE d) 5 BE e) 3 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$.

Der Graph von g ist K_g .

a) Zeigen Sie, dass K_g die folgenden Extrempunkte hat:

- Hochpunkt $H(0|5)$
- Tiefpunkte $T_1(-2|1)$ und $T_2(2|1)$

b) Zeichnen Sie K_g in ein Koordinatensystem.

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = 5$ und K_g schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt.

d) Der Koordinatenursprung und $Q(u|g(u))$ (mit $0 \leq u \leq 1,5$) sind zwei Eckpunkte eines zur y -Achse symmetrischen Dreiecks.
Ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt eines solchen Dreiecks auf zwei Nachkommastellen genau.

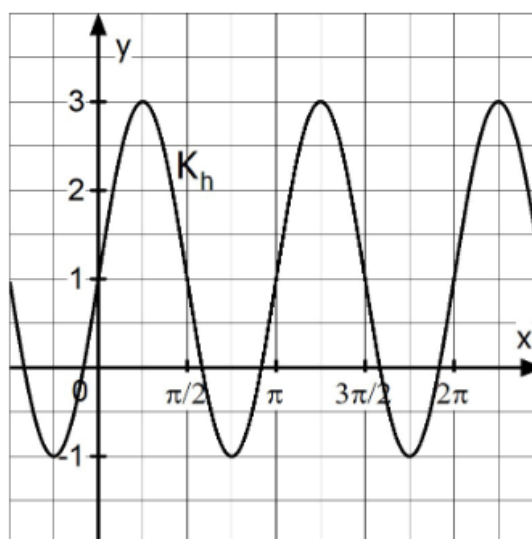
e) Geben Sie eine Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion k an, sodass die Graphen von k und g im Intervall $[-2;2]$ dieselben Extrempunkte haben.

1.2 (6 BE)

Gegeben ist der Graph K_h einer trigonometrischen Funktion h .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- (1) Die maximale Steigung von K_h ist 6.
- (2) Die Funktion h hat in $x = 115\pi$ eine Wendestelle.
- (3) Der Graph jeder Stammfunktion H von h ist streng monoton steigend.



Lösungen**1.1**

- a) Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $g'(x) = 0$ und $g''(x) \neq 0$

Es gilt $g'(x) = x^3 - 4x$ und $g''(x) = 3x^2 - 4$

Nachweis des Hochpunktes $H(0|5)$:

Es gilt $g'(0) = 0$ und $g''(0) = -4 < 0$ und $g(0) = 5$

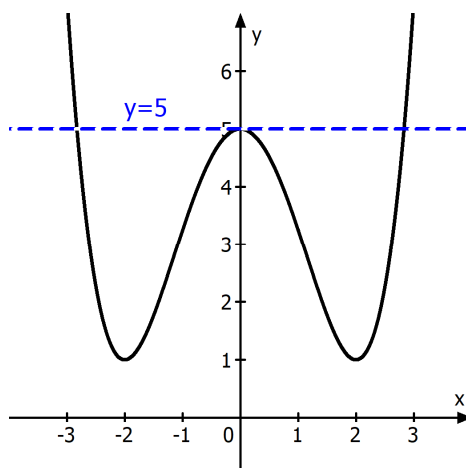
Nachweis des Tiefpunktes $T_1(-2|1)$:

Es gilt $g'(-2) = 0$ und $g''(-2) = 8 > 0$ und $g(-2) = 1$

Nachweis des Tiefpunktes $T_2(2|1)$:

Es gilt $g'(2) = 0$ und $g''(2) = 8 > 0$ und $g(2) = 1$

- b) Zeichnung mit Hilfe der angegebenen Extrempunkte und der Wertetabelle des Taschenrechners:



- c) Zunächst wird die rechte Schnittstelle der waagrechten Geraden $y = 5$ mit dem Graphen von g benötigt:

$$\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

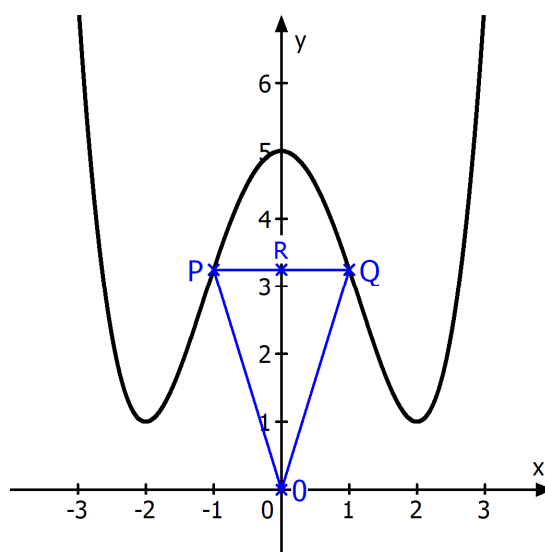
Gleichung II): $\frac{1}{4}x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Flächenberechnung:

$$A = \int_0^{\sqrt{8}} (5 - g(x)) dx = \int_0^{\sqrt{8}} \left(-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{8}} \approx 6,03 - 0 = 6,03$$

Der Flächeninhalt beträgt ca. 6,03 FE.

d) Skizze des Dreiecks:



Flächeninhaltsformel des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{OR}$

Koordinaten der Punkte (in Abhängigkeit von u):

$Q(u | f(u))$, $P(-u | g(-u))$, $O(0|0)$, $R(0|g(u))$

Es gilt $\overline{PQ} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{OR} = g(u) - 0 = g(u)$

Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot g(u) = \frac{1}{4}u^5 - 2u^3 + 5u$ mit $0 \leq u \leq 1,5$

Gesucht ist das absolute Maximum von $A(u)$ im Intervall $0 \leq u \leq 1,5$.

Zunächst wird das relative Maximum bestimmt:

Hinreichende Bedingung: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

Es gilt $A'(u) = \frac{5}{4}u^4 - 6u^2 + 5$ und $A''(u) = 5u^3 - 12u$

$\frac{5}{4}u^4 - 6u^2 + 5 = 0$ Substitution: $z = u^2$

$$\frac{5}{4}z^2 - 6z + 5 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 25}}{2,5} = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{2,5} \quad z_1 = 3,73 \quad z_2 = 1,07$$

Rücksubstitution: $u^2 = 3,73 \Rightarrow u = \pm\sqrt{3,73} = \pm 1,93$

$u^2 = 1,07 \Rightarrow u = \pm\sqrt{1,07} = \pm 1,03$

Aufgrund von $0 \leq u \leq 1,5$ kommt nur $u = 1,03$ in Betracht.

Wegen $A''(1,03) < 0$ liegt bei $u = 1,03$ ein lokales Maximum vor.

Es gilt $A(1,03) = 3,25$ FE.

Kontrolle der Randwerte $u = 0$ und $u = 1,5$:

$$A(0) = 0 < 3,25 \quad \text{und} \quad A(1,5) = 2,64 < 3,25$$

Damit ist die maximale Fläche des Dreiecks 3,25 FE.

- e) Da der Hochpunkt $H(0|5)$ auf der y-Achse liegen, ist der Ansatz einer allgemeinen Kosinusfunktion zielführend:

$$k(x) = a \cdot \cos(bx) + d$$

Der Wert von d kann mit den y-Werten der Extrempunkte berechnet werden:

$$d = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$\text{Die Amplitude ist } a = y_H - d = 5 - 3 = 2$$

Der waagrechte Abstand der Tiefpunkte ist 4, dies ist auch die Periode der Funktion.

$$\text{Es gilt } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$k(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$$

1.2

- (1) Aufstellen der Funktionsgleichung von h :

$$h(x) = 2 \sin(2x) + 1 \quad (\text{wegen der Periode } p = \pi \text{ ist } b = \frac{2\pi}{\pi} = 2)$$

Einen Punkt mit maximaler Steigung befindet sich bei $x = 0$.

$$\text{Es gilt } h'(x) = 2 \cos(2x) \cdot 2 \text{ mit } h'(0) = 4.$$

Somit ist die maximale Steigung 4 und die Aussage ist falsch.

Alternativ kann man an das Schaubild von h bei $x = 0$ eine Tangente einzeichnen und anhand des Steigungsdreiecks erkennen, dass die Steigung 4 ist.

- (2) Die Aussage ist wahr. Die Wendepunkte liegen auf der waagrechten Linie $y = 1$ und bei $x = 115\pi$ ist der y-Wert ebenfalls 1.

- (3) Die Aussage ist falsch, da das Schaubild von h nicht komplett oberhalb der x-Achse liegt.