

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2026
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

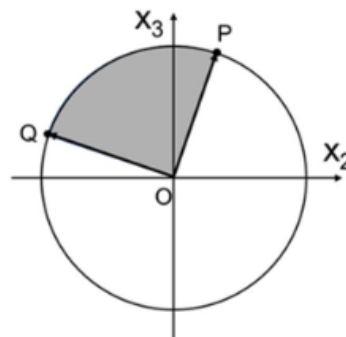
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra

3.1 (a) 3 BE b) 5 BE

Die Abbildung zeigt einen Kreis in der x_2x_3 -Ebene mit dem Mittelpunkt $O(0|0|0)$. Die Punkte $P(0|1|3)$ und $Q(0|-3|1)$ liegen auf dem Kreis.



- a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ einen rechten Winkel einschließen.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des in der Abbildung markierten Kreissektors.

- b) Die Ebene E_1 ist parallel zur x_1 -Achse und hat mit dem Kreis nur den Punkt P gemeinsam.
Eine Ebene E_2 ist parallel zu E_1 . Sie hat keinen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis und einen größeren Abstand zum Koordinatenursprung als E_1 .

Ermitteln Sie jeweils eine Koordinatengleichung für die Ebenen E_1 und E_2 .

3.2 (a) 2 BE b) 4 BE c) 6 BE

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie A^2 .

Für die Matrix B gilt: $B = A^2 - 2 \cdot E$.
Geben Sie die Matrix B an.

- b) Bestimmen Sie den positiven Wert für a, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) Zeigen Sie anhand der Matrix A und einer selbst gewählten Matrix C, dass das Produkt $A \cdot C$ auch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergeben kann, wenn $C \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösungen**3.1**

a) Kontrolle des rechten Winkels: $\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 3 + 3 = 0$

Da das Skalarprodukt Null ergibt, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander.

Flächeninhalt des Kreissektors:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi \cdot |\overrightarrow{OP}|^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot \sqrt{10}^2 \cdot \frac{1}{4} = 7,85 \text{ FE}$$

b) Wenn die Ebene E_1 mit dem Kreis nur den Punkt P gemeinsam hat, berührt die

Ebene den Kreis im Punkt P. Das heißt, dass der Radiusvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

senkrecht auf der Ebene E_1 steht.

Damit ist $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene.

Ansatz für die Koordinatengleichung: $x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen von $P(0|1|3)$ ergibt $d = 10$.

Gleichung von E_1 : $x_2 + 3x_3 = 10$

(Hinweis: Da in der Gleichung die Variable x_1 fehlt, ist die Ebene parallel zur x_1 -Achse wie vorgegeben)

Ansatz für die Gleichung von E_2 : $x_2 + 3x_3 = d$

Da die Ebene weiter vom Ursprung weg sein soll kann man zum Beispiel den Punkt $Z(0|1|4)$ wählen, der auf der Ebene liegen soll.

Einsetzen von $Z(0|1|4)$ ergibt $d = 13$.

Gleichung von E_2 : $x_2 + 3x_3 = 13$

3.2

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5a-2 \\ 10a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5a-2+a \cdot (10a-4) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5a-2+10a^2-4a=0 \Leftrightarrow 10a^2+a-2=0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{20} = \frac{-1 \pm 9}{20} \quad \text{also } a_1 = \frac{2}{5} \text{ und } a_2 = -\frac{1}{2}$$

Somit ist $a = \frac{2}{5}$ der gesuchte Wert.

$$\text{c) } A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5a-2c & 5b-2d \\ 10a-4c & 10b-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist zum Beispiel richtig für $a = 4$ und $c = 10$ und $b = 2$ und $d = 5$.

$$\text{Also } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$