

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2026
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Lineare Algebra Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

3 Lineare Algebra (a) 5 BE b) 3 BE c) 3 BE d) 3 BE e) 6 BE)

Der Roloplan ist ein von Richard Steiff im Jahr 1909 entwickelter Stoffdrachen. Ein Modell des Stoffdrachens wird durch einen Stab und zwei Tragflächen beschrieben. Diese werden durch Seile miteinander verbunden.

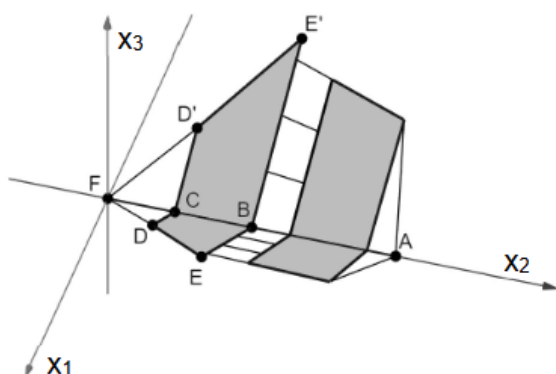


Abb. 1

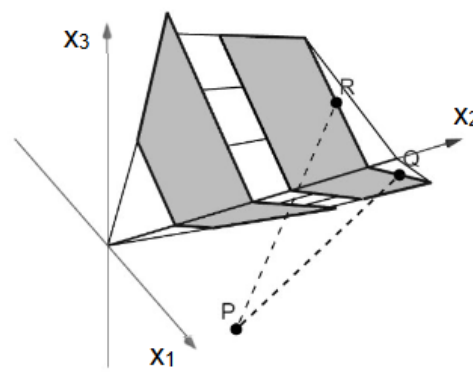


Abb. 2

Die Punkte $A(0|18|0)$ und $F(0|0|0)$ begrenzen den Stab. Die Punkte $B(0|9|0)$, $C(0|4,2|0)$, $D(3,6|4,2|1)$, $E(8,1|9,2,25)$, D' und E' begrenzen die Tragfläche 1. Die Punkte D' und E' entstehen durch Spiegelung der Punkte D und E an der x_2x_3 -Ebene. Eine Längeneinheit entspricht 1 dm.

- Zeigen Sie, dass das Viereck $BCDE$ ein Trapez ist.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der dieses Trapez liegt.
- Das Trapez $BCDE$ hat bei B und C jeweils einen rechten Winkel.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Tragfläche 1.
- Die Tragfläche 1 wird auf die x_1x_2 -Ebene projiziert.
Zeichnen Sie diese Projektion in ein x_1x_2 -Koordinatensystem.
- Zwischen den Punkten D und F wird eine Schnur gespannt.
Berechnen Sie den Winkel α , den die Schnur mit der Kante DE einschließt.
- An mehreren Punkten des Stoffdrachens sind Schnüre angebracht. Der Punkt $Q(3|16,2|0,7)$ ist einer dieser Punkte (siehe Abb. 2). Alle Schnüre treffen sich im Punkt P unterhalb des Stoffdrachens.
Im Modell gelten folgende Annahmen:
 - Der Punkt P liegt in der x_2x_3 -Ebene.
 - Der Punkt P liegt unterhalb des Stabs des Stoffdrachens.
 - Die Schnur von P zu Q ist 5 dm lang.

Ermitteln Sie die Koordinaten zweier möglicher Punkte P .

Lösungen**3 Lineare Algebra**

a) Bei einem Trapez ist ein Seitenpaar parallel.

Laut der Abbildung 1 sind die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{CD}$ parallel.

Nachweis: Es gilt $\overline{BE} = \begin{pmatrix} 8,1 \\ 0 \\ 2,25 \end{pmatrix}$ und $\overline{CD} = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da $2,25 \cdot \overline{CD} = \overline{BE}$ gilt, sind die Vektoren Vielfache zueinander und damit parallel.

Gleichung der Ebene durch die Punkte B,C,D:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4,8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3,6 \\ -4,8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Tragfläche 1 besteht aus 2 Trapezen.

Flächeninhalt des Trapezes BCDE: $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\overline{BE} + \overline{CD}}{2} \cdot h$

Es gilt $\overline{BE} = |\overline{BE}| = \sqrt{8,1^2 + 2,25^2} \approx 8,41$ und $\overline{CD} = |\overline{CD}| = \sqrt{3,6^2 + 1^2} \approx 3,74$

Die Höhe des Trapezes ist die Strecke $h = \overline{BC} = |\overline{BC}| = 4,8$, da das Trapez bei B und C einen rechten Winkel hat.

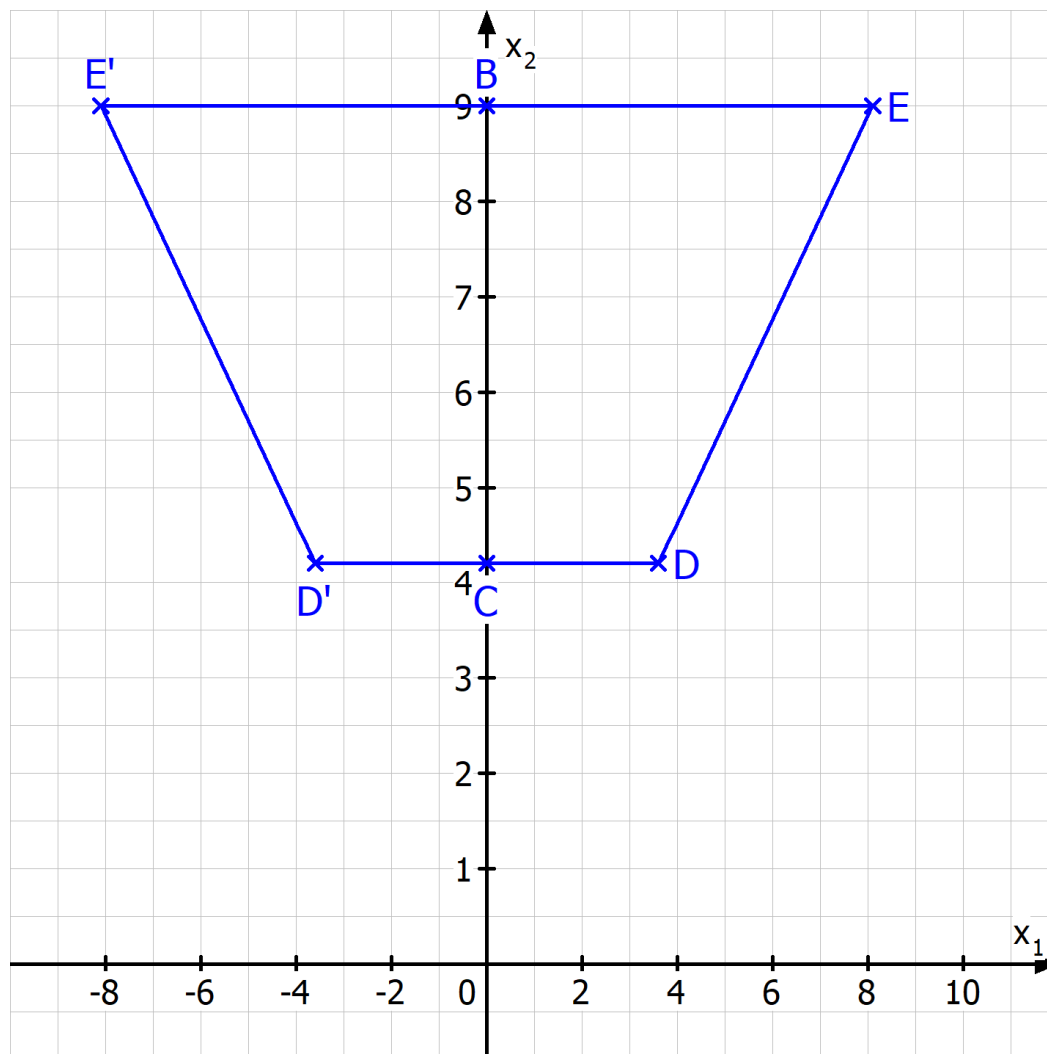
$$A_{\text{Trapez}} = \frac{8,41 + 3,74}{2} \cdot 4,8 = 29,16 \text{ dm}^2$$

Da die Punkte D' und E' durch Spiegelung der Punkte D und E an der x_2x_3 -Ebene entstehen, hat das Trapez BCD'E' denselben Flächeninhalt wie das Trapez BCDE.

Flächeninhalt der Tragfläche 1: $A_{\text{Tragfläche1}} = 2 \cdot 29,16 = 58,32 \text{ dm}^2$

c) Folgende Punkte sind in das Koordinatensystem einzutragen:

$B(0|9)$, $C(0|4,2)$, $D(3,6|4,2)$, $E(8,1|9)$, $D'(-3,6|4,2)$, $E'(-8,1|9)$



d) Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -3,6 \\ -4,2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,8 \\ 1,25 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3,6 \\ -4,2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4,8 \\ 1,25 \end{pmatrix}}{\sqrt{31,6} \cdot \sqrt{44,8525}} = \frac{-37,61}{37,648} \Rightarrow \alpha = 177,4^\circ$$

- e) Der gesuchte Punkt P hat die allgemeinen Koordinaten $P(0|u|v)$, wobei $v < 0$ ist, da der Punkt unterhalb des Stabs des Stoffdrachens liegt.

$$\text{Bedingung: } |\overline{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 16,2 - u \\ 0,7 - v \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + (16,2 - u)^2 + (0,7 - v)^2} = 5$$

$$\Rightarrow 9 + (16,2 - u)^2 + (0,7 - v)^2 = 25$$

Da die Gleichung 2 Variablen besitzt, gibt es unendlich viele Lösungen.

Setze z.B. $v = -1$ (es muss $v < 0$ sein).

$$\text{Dann folgt } 9 + (16,2 - u)^2 + 1,7^2 = 25 \Leftrightarrow (16,2 - u)^2 = 13,11$$

$$\Leftrightarrow 16,2 - u = \sqrt{13,11} \Leftrightarrow u = 12,6$$

Ein möglicher Punkt ist $P(0|12,6|-1)$.

Setze z.B. $v = -2$ (es muss $v < 0$ sein).

$$\text{Dann folgt } 9 + (16,2 - u)^2 + 2,7^2 = 25 \Leftrightarrow (16,2 - u)^2 = 8,71$$

$$\Leftrightarrow 16,2 - u = \sqrt{8,71} \Leftrightarrow u = 13,2$$

Ein weiterer möglicher Punkt ist $P(0|13,2|-2)$.