

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2026
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis

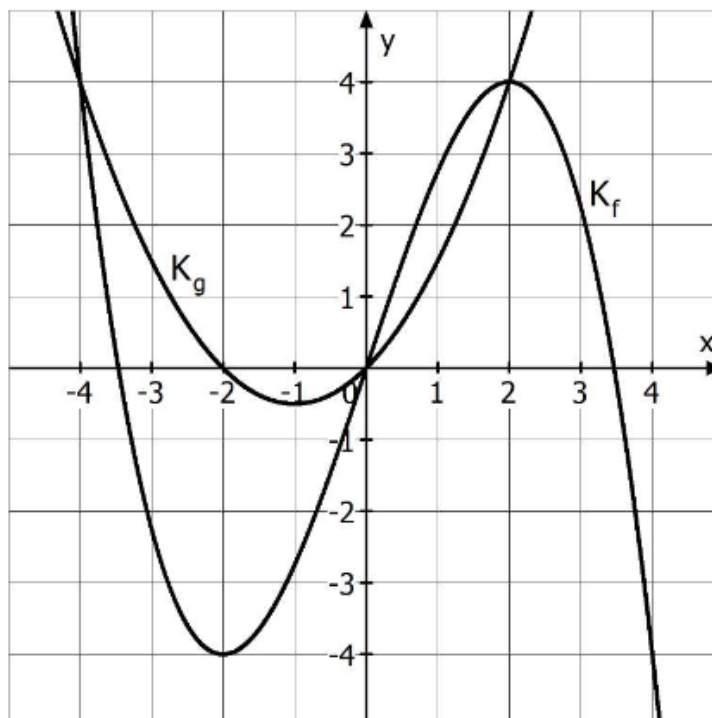
1.1 (a) 3 BE b) 6 BE c) 3 BE d) 3 BE)

Gegeben sind die Graphen K_f und K_g der beiden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \quad \text{und}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x.$$

K_f schneidet die x -Achse unter anderem bei $x_1 = 2\sqrt{3}$.



a) Geben Sie die exakte Nullstelle von f im Bereich $x < 0$ an.

K_f ist der Graph einer Stammfunktion von f .

Ermitteln Sie die Steigung von K_f an der Stelle $x = 2$.

b) Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Die erste Ableitungsfunktion von g hat für $-2 < x < 0$ nur negative Funktionswerte.

(2) Die Funktion f'' hat an der Stelle $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus.

(3) Im Intervall $[0;2]$ gilt für jedes x : $f(x) - g(x) < \frac{f(2)}{2}$

c) Die Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = \sqrt{20}$ schließen mit K_f und der x -Achse zwei Teilflächen ein.

Zeigen Sie, dass die beiden eingeschlossenen Teilflächen gleich groß sind.

- d) Der Term der Funktion f kann auch in der Form $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2 + 4$ dargestellt werden.
Bestimmen Sie a , b und c .

1.2 (a) 3 BE b) 1 BE c) 4 BE d) 2 BE e) 5 BE)

Eine Messstation zeichnet den Wasserdurchfluss in einem Bach auf.

Die Funktion v mit $v(t) = t^2 \cdot e^{-0,5t+5} + 100$ ($t \in \mathbb{R}, t \geq 0$)

modelliert die Durchflussrate im Anschluss an ein Starkregenereignis.

Dabei gibt t die Zeit in Stunden nach Einsetzen des Starkregens und $v(t)$ die

Durchflussrate in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ an.

Normalerweise beträgt die Durchflussrate im Bach $100 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

- a) Zeichnen Sie den Graphen von v für $0 \leq t \leq 24$.
- b) Geben Sie eine Gleichung der Asymptote des Graphen von v an.
- c) Der Graph von v hat bei $t_1 = 0$ seinen einzigen Tiefpunkt und bei t_2 ($t_2 > 0$) seinen einzigen Hochpunkt. Berechnen Sie t_2 .
- d) Interpretieren Sie die Bedeutung des Terms im Anwendungszusammenhang:

$$\int_0^{24} (v(t) - 100) dt$$

- e) Ermitteln Sie für $t > 4$ näherungsweise eine Lösung der Gleichung

$$v(t) = 0,85 \cdot v(4).$$

Interpretieren Sie diese Lösung im Anwendungszusammenhang.

Lösungen**1 Analysis****1.1**

- a) Da das Schaubild von f symmetrisch zum Ursprung ist (die Hochzahlen bei x sind alle ungerade), befindet sich die Nullstelle für $x < 0$ bei $x = -2\sqrt{3}$.

Steigung von K_F bei $x = 2$: $F'(2) = f(2) = 4$

- b) (1) Die Aussage ist falsch, da bei $x = -0,5$ die Steigung des Schaubildes von g positiv ist. Somit gilt $g'(-0,5) > 0$.
- (2) Bei $x = 0$ wechselt die Krümmung des Schaubildes von f von einer Linkskurve ($f''(x) > 0$) in eine Rechtskurve ($f''(x) < 0$).
Die Aussage ist wahr.
- (3) Es ist $\frac{f(2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$
Zu prüfen ist also $f(x) - g(x) < 2$ für $x \in [0; 2]$.
Die Aussage ist wahr, da der senkrechte Abstand zwischen den Schaubildern von f und g in diesem Intervall immer kleiner als 2 ist.

- c) Inhalt der ersten Teilfläche:

$$A_1 = \int_2^{2\sqrt{3}} f(x) dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_2^{2\sqrt{3}} = 9 - 5 = 4 \text{ FE}$$

$$A_2 = \left| \int_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{20}} f(x) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{2\sqrt{3}}^{\sqrt{20}} \right| = |5 - 9| = 4 \text{ FE}$$

Die beiden Flächeninhalte sind gleich groß was zu zeigen war.

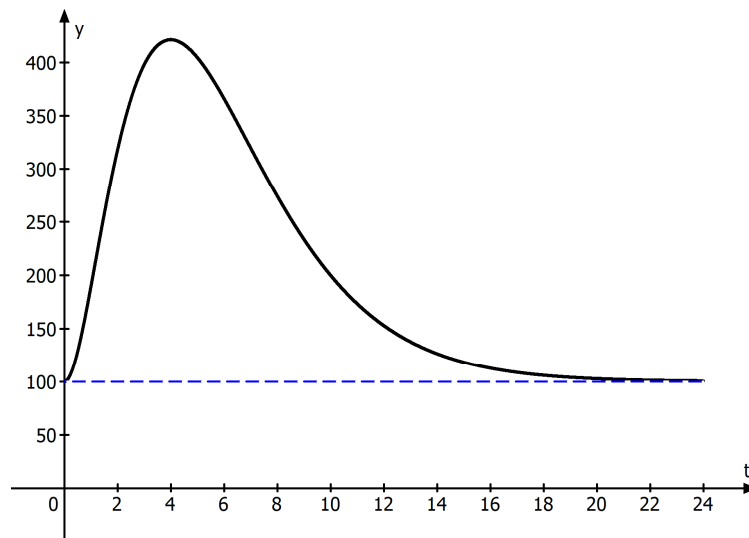
- d) In dem Term $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2 + 4$ ist die Produktdarstellung der Funktion f enthalten, ergänzt um den Summanden $+4$.
Wäre der Summand $+4$ nicht vorhanden, wären die Werte b und c die Nullstellen von f .
Durch den Summanden $+4$ findet man die Werte von b und c , indem man die x -Achse gedanklich vom 4 LE nach oben versetzt.
Dann wäre bei $x = -4$ eine einfache Nullstelle und bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle.
Somit ist $b = -4$ und $c = 2$.
Der Funktionsterm lautet $f(x) = a \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)^2 + 4$

Den Wert von a erhält man, indem man einen weiteren Punkt des Schaubildes (z.B. $O(0|0)$) in die Funktionsgleichung einsetzt:

$$0 = a \cdot (0 + 4) \cdot (0 - 2)^2 + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$$

1.2

a) Zeichnung mit Hilfe der Wertetabelle des Taschenrechners



b) Gleichung der Asymptote: $y = 100$

c) Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt: $v'(t) = 0$

$$v'(t) = 2t \cdot e^{-0,5t+5} + t^2 \cdot e^{-0,5t+5} \cdot (-0,5) = t \cdot e^{-0,5t+5} (2 - 0,5t)$$

$$t \cdot e^{-0,5t+5} (2 - 0,5t) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $t = 0$ (ist laut Aufgabe die Minimumstelle)

Gleichung II): $t = 4$

Damit ist $t_2 = 4$.

- d) Das Integral beschreibt die Fläche zwischen dem Schaubild von f und der waagrechten Asymptote $y = 100$ im Intervall $[0;24]$.

Dies entspricht der Wassermenge in m^3 , die zusätzlich aufgrund des Starkregenereignisses neben der normalen Durchflussmenge innerhalb von 24 Stunden durch den Bach geflossen sind.

- e) $v(t) = 0,85 \cdot 421,4$
 $\Leftrightarrow v(t) = 358,2$

Anhand der Wertetabelle des Taschenrechners erkennt man:
 $v(6) = 366$ und $v(7) = 319,6$

Somit muss $6 < t < 7$ sein.

Weitere Proben mit dem Taschenrechner ergeben:
Für $t \approx 6,18$ gilt $v(t) = 0,85 \cdot v(t)$

Interpretation: Nach ca. 6,18 Stunden ist hat sich die maximale Durchflussrate (bei $t = 4$) um 15% reduziert.