

**Hauptprüfung Abiturprüfung 2026
Erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg

Teil B – Analysis Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

berufliche Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

1 Analysis

1.1 (a) 3 BE b) 3 BE c) 4 BE d) 3 BE e) 3 BE f) 4 BE g) 4 BE)

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{125}(x-4)^3 + 2$.

- a) Geben Sie in der richtigen Reihenfolge die Transformationen an, durch die der Graph von f aus dem Graphen der Funktion p mit $p(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, hervorgeht.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f .

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist die Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$ gegeben.

- c) Auf dem Intervall $[0; c]$ mit $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, rotiert der Graph von g um die x -Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Ermitteln Sie, für welchen Wert von c der Rotationskörper ein Volumen von 50π hat.
- d) Begründen Sie, dass folgende Aussage wahr ist:
Im Intervall $]0; 3]$ gibt es ein x_1 für das gilt: Die lokale Änderungsrate der Funktion g bei x_1 ist gleich groß wie die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion g auf dem Intervall $]0; 3]$.

Die Funktion h ist gegeben mit $h(x) = \sqrt{\frac{1}{125}(x-4)^3 + 2}$.

- e) Erläutern Sie, wie die maximale Definitionsmenge von h bestimmt werden kann.
- f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h für $-2 \leq x \leq 2$.
- g) Begründen Sie, dass h kein lokales Maximum besitzt.

1.2 (6 BE)

Gegeben sind die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen k und s .

Für diese gilt: $k(x) = \sin(x)$ $s(x) = x$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

- (1) Für alle x gilt: $k(x) \cdot s(x) > 0$.
- (2) $\int_{0,5}^1 (s(x) - k(x)) dx > 0$
- (3) Für alle $x \geq \pi$ gilt, dass $s(x) - k(x) \geq \pi$

Lösungen**1 Analysis****1.1**

- a) 1.Schritt: Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{125}$ in y-Richtung (ergibt $\frac{1}{125}x^3$)
 2.Schritt: Verschiebung um 4 LE in x-Richtung nach rechts (ergibt $\frac{1}{125}(x-4)^3$)
 3.Schritt: Verschiebung um 2 LE in y-Richtung nach oben (ergibt $f(x)$)

b) Es gilt $f'(x) = \frac{3}{125}(x-4)^2$ und $f''(x) = \frac{6}{125}(x-4)$ und $f'''(x) = \frac{6}{125}$

Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$\frac{6}{125}(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$f'''(4) = \frac{6}{125} \neq 0$$

Wegen $f(4) = 2$ hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(4|2)$.

c) $V = \pi \cdot \int_0^c \sqrt{x}^2 dx = \pi \cdot \int_0^c x dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^c = \pi \cdot \frac{1}{2}c^2$

Bedingung: $50\pi = \pi \cdot \frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$ (da $c > 0$)

d) Ableitung von $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$: $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Lokale Änderungsrate bei x_1 : $g'(x_1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_1}}$

Durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $]0;3]$: $\frac{g(3)-g(0)}{3-0} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{0}}{3-0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bedingung: $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad | \cdot 2\sqrt{x_1}$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{x_1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Da $x_1 \in]0;3]$ ist, ist die Aussage wahr.

e) Bedingung für die Definitionsmenge von h:

$$f(x) = \frac{1}{125}(x-4)^3 + 2 \geq 0$$

Zunächst ermittelt man die Nullstellen von f:

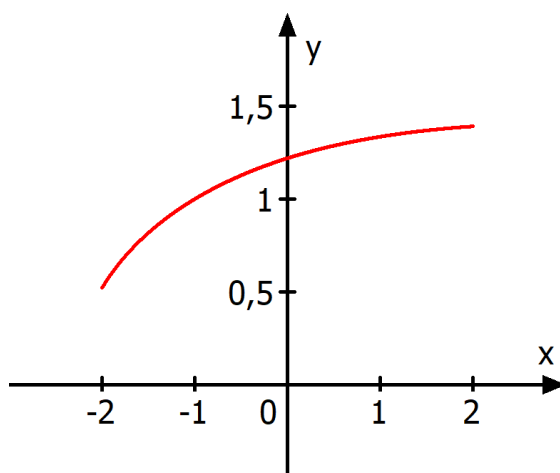
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{125}(x-4)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^3 = -250 \Leftrightarrow x-4 = -\sqrt[3]{250} \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{250} + 4 \approx -2,3 \end{aligned}$$

Nun prüft man mit Hilfe einer Testzahl, in welchem der beiden Intervalle

$]-\infty; -2,3]$ bzw. $[-2,3; +\infty[$ die Ungleichungsbedingung $\frac{1}{125}(x-4)^3 + 2 \geq 0$ erfüllt ist.

Dieses Intervall ist dann die Definitionsmenge von h.

f) Die Zeichnung erfolgt mit Hilfe der Wertetabelle des Taschenrechners.



g) Das Schaubild von $p(x) = x^3$ besitzt in $O(0|0)$ einen Sattelpunkt, jedoch keinen Hochpunkt. Das Schaubild von p ist monoton wachsend.

Das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{125}(x-4)^3 + 2$ hat aufgrund der dargestellten

Transformationen in a) den Sattelpunkt $W(4|2)$, jedoch ebenfalls keinen Hochpunkt und ist ebenfalls monoton wachsend.

Die Funktion $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ist monoton wachsend, da die innere Funktion $f(x)$ monoton wachsend ist und die äußere Funktion $g(x) = \sqrt{x}$ ebenfalls monoton wachsend ist.

Daher kann die Funktion h kein lokales Maximum besitzen.

1.2

(1) $k(x) \cdot s(x) = \sin(x) \cdot x > 0$ für alle x

Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: Für $x = 0$ gilt $k(0) \cdot s(0) = 0$

(2) $\int_{0,5}^1 (x - \sin(x)) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \cos(x) \right]_{0,5}^1 = \frac{1}{2} + \cos(1) - \left(\frac{1}{8} + \cos(0,5) \right) \approx 0,04 > 0$

Die Aussage ist wahr.

(3) $x - \sin(x) \geq \pi$ für alle $x \geq \pi$

Betrachte die Funktion $z(x) = x - \sin(x)$

Wegen $z'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ für alle x ist die Funktion z monoton wachsend.

Da $z(\pi) = \pi$ gilt und die Funktion z monoton wachsend ist, gilt $z(x) \geq \pi$ für $x \geq \pi$.

Die Aussage ist wahr.