

Hauptprüfung Abiturprüfung 2026 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Stochastik – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe III 1

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind. Bei einem Zufallsexperiment wird dieser Würfel viermal geworfen. Die erzielten Zahlen werden in der geworfenen Reihenfolge als Ergebnis notiert.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: „Bei keinem der Würfe wird die 6 erzielt.“

B: „Bei mindestens drei Würfeln wird eine Zahl erzielt, die größer als 2 ist.

(4 BE)

b) Begründen Sie, dass es $\binom{6}{4} \cdot 4!$ Ergebnisse gibt, bei denen alle erzielten Zahlen verschieden sind. (2 BE)

c) Geben Sie ein Ergebnis im Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit

mit dem Term $1 - \frac{\binom{6}{4} \cdot 4!}{6^4}$ berechnet werden kann. (2 BE)

Bei einem Spiel besteht eine Runde darin, dass der Würfel fünfmal geworfen wird. Eine Runde wird gewonnen, wenn dabei mindestens eine Zahl mehrfach auftritt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Runde gewonnen wird, beträgt $\frac{49}{54}$. Dieses Spiel soll nun von einer Künstlichen Intelligenz (KI) simuliert werden. Die Zufallsgröße Y beschreibt dabei die Anzahl der gewonnen Runden. Es wird davon ausgegangen, dass Y binomialverteilt ist. Zur Überprüfung der KI soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Runde gewonnen wird, beträgt mindestens $\frac{49}{54}$ “, getestet werden. Der Stichprobenumfang beträgt 200 Runden. Es ergibt sich $\{0; \dots; 173; 174\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

d) Formulieren Sie den zugehörigen Fehler erster Art im Sachzusammenhang. (2 BE)

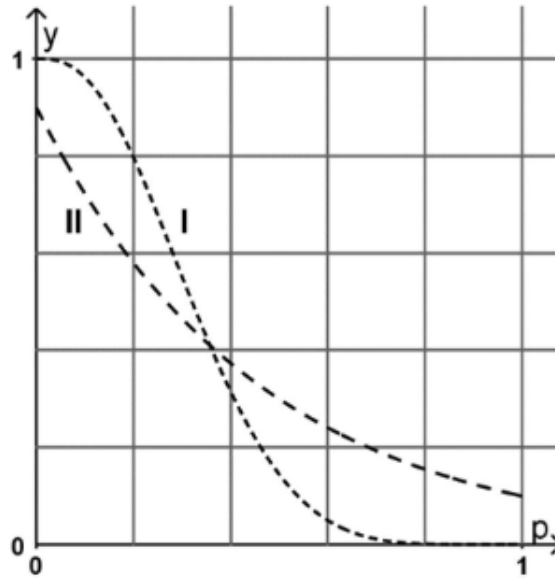
e) Untersuchen Sie, ob das zugrundeliegende Signifikanzniveau des Tests 8% betragen kann. (2 BE)

f) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

„Wenn die Nullhypothese nicht wahr ist, dann beträgt in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe mindestens 180 Treffer enthält, höchstens 20%.“

Ein weiteres Spiel wird mit einem Zufallsgenerator simuliert.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit kann dabei auf jeden beliebigen Wert p mit $0 \leq p \leq 1$ eingestellt werden. Bei n -maligem Spielen ist die Anzahl Z der gewonnenen Spiele binomialverteilt mit den Parametern n und p . Für einen bestimmten Wert von n gehört einer der beiden Graphen in der Abbildung zu der Funktion, die jedem Wert von p die Wahrscheinlichkeit $P_p^n(Z \leq 2)$ zuordnet.



- g) Begründen Sie, dass Graph II nicht zur oben beschriebenen Funktion gehört. (2 BE)
- h) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Wert von n . (4 BE)

Lösungen
Aufgabe III 1

a) $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Ergebnisse, die größer als 2 sind.

X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{4}{6}$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,407 = 0,593$$

- b) Der Term $\binom{6}{4}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, von den 6 Zahlen des Würfels genau 4 verschiedene Zahlen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) auszuwählen.

Hat man eine konkrete Auswahl von 4 Zahlen vorliegen, gibt es $4!$ verschiedene Möglichkeiten, diese 4 Zahlen in ihrer Reihenfolge zu vertauschen.

Damit gibt es insgesamt $\binom{6}{4} \cdot 4!$ Möglichkeiten, bei denen alle gewürfelten Zahlen verschieden sind.

- c) Der Term $\frac{\binom{6}{4} \cdot 4!}{6^4}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei viermaligem Würfeln lauter verschiedene Zahlen zu würfeln.

Der Term $1 - \frac{\binom{6}{4} \cdot 4!}{6^4}$ gibt die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen

Gegenereignisses an, also das Ereignis dass mindestens 2 der gewürfelten Zahlen gleich sind.

- d) Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese zu Unrecht abgelehnt wird. Das bedeutet hier, dass man anhand des Tests sich fälschlicherweise dafür entscheidet, dass die Wahrscheinlichkeit für eine gewonnene Runde weniger als $\frac{49}{54}$ beträgt.

e) Nullhypothese: $H_0 : p \geq \frac{49}{54}$

Alternativhypothese: $H_1 : p < \frac{49}{54}$

Y ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = \frac{49}{54}$.

Der Ablehnungsbereich ist $\{0; 1; \dots; 174\}$.

Es gilt $P(Y \leq 174) = 0,049$ und $P(Y \leq 175) = 0,0766$ $P(Y \leq 176) = 0,115$

Wäre $\alpha = 8\%$ dann wäre der Ablehnungsbereich $\{0; 1; \dots; 175\}$.
Somit kann das Signifikanzniveau nicht 8% betragen.

- f) Wenn die Nullhypothese nicht wahr ist, gilt $p < \frac{49}{54}$.

Wir nehmen daher an, dass $p = \frac{48}{54}$ gilt.

Y sei binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = \frac{48}{54}$

$P(Y \geq 180) = 1 - P(Y \leq 179) = 0,359$

Da diese Wahrscheinlichkeit über 20% liegt, ist die Aussage falsch.

- g) Der Wert von n muss größer als 2 sein, ansonsten wäre $P(Z \leq 2)$ immer gleich 1 unabhängig von der Trefferwahrscheinlichkeit.

Für $n > 2$ und $p = 0$ gilt $P(Z = 0) = 1$ und daher auch $P(Z \leq 2) = 1$, da bei $p = 0$ keine Treffer vorkommen können.

Für $n > 2$ und $p = 1$ gilt $P(Z = n) = 1$ und daher auch $P(Z \leq 2) = 0$, da bei $p = 1$ jedes Experiment zu einem Treffer führt.

Somit kann der Graph II nicht zu der Funktion gehören, da für $p = 0$ der y-Wert $y = 1$ sein muss und für $p = 1$ der y-Wert $y = 0$ sein muss.

- h) Der Punkt $(0,2|0,8)$ liegt auf dem Schaubild.

Das bedeutet für $p = 0,2$ gilt $P(Z \leq 2) = 0,8$

Probe mit dem TR:

Für $n = 8$ gilt $P(Z \leq 2) = 0,8$

Daher ist $n = 8$.