

Hauptprüfung Abiturprüfung 2026 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Teil B Analytische Geometrie – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe II 2

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEF mit den Eckpunkten $A(2|0|-0,5)$, $B(3|5|-0,5)$, $C(-3|5|-0,5)$, $D(-2|0|-0,5)$, $E(2|5|1)$ und $F(-2|5|1)$.

Dieser stellt modellhaft eine aus dem Wasser ragende Sprungschanze für Wasserski dar. Das Viereck AEFD beschreibt den sogenannten Schanzentisch, die x_1x_2 -Ebene stellt die Wasseroberfläche dar.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

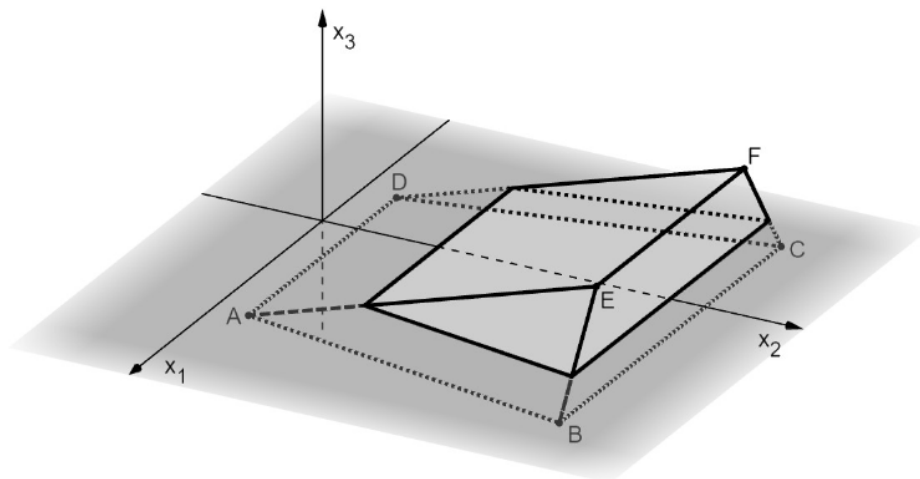


Abb. 1

- a) Das Viereck AEFD ist ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass es auch ein Rechteck ist. (2 BE)
- b) Begründen Sie, dass die x_2x_3 -Ebene eine Symmetrieebene des Körpers ABCDEF ist. (2 BE)
- c) Für eine reelle Zahl k ist der Vektor $\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene, in der das Rechteck AEFD liegt. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $k = 0$ ist. (2 BE)
- d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Schanzentisch gegenüber der Wasseroberfläche geneigt ist. (3 BE)
- e) Der Teil des Schanzentischs, der sich oberhalb der Wasseroberfläche befindet, soll als Werbefläche genutzt werden. Die folgende Aussage stellt den ersten Schritt der Bestimmung des Flächeninhalts dieser Werbefläche dar:

$$\text{Mit } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich } r = \frac{1}{3}.$$

Geben Sie die Bedeutung dieses Wertes $\frac{1}{3}$ für r im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Werbefläche. (4 BE)

Ein Wasserskifahrer fährt den Schanzentisch geradlinig hinauf, bis er die Kante erreicht, die im Modell der Strecke $\overline{EF}$ entspricht. Der anschließende Sprung beginnt an dieser Kante und endet auf der Wasseroberfläche. Insgesamt legen die Füße des Wasserskifahrers einen Weg zurück, der im Modell als Kurve in einer Ebene beschrieben werden kann, die senkrecht zur x_1x_2 -Ebene liegt und mit L bezeichnet wird. Die Ebene L kann durch die Gleichung $10x_1 - 3x_2 = 0$ dargestellt werden. Die Orte des Absprungs und des Auftreffens auf der Wasseroberfläche werden im Modell durch die Punkte V bzw. W beschrieben. In Abbildung 2 ist die Kurve in der Ebene L dargestellt; die eingetragene Weite des Sprungs ist die Länge einer Strecke, die im Modell ebenfalls in der Ebene L liegt.

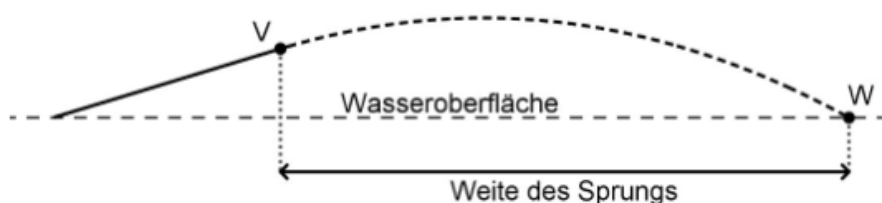


Abb. 2

- f) Beurteilen Sie, ob der Wasserskifahrer so über den Schanzentisch fährt, dass sein Weg im Modell in der Symmetrieebene des Körpers $ABCDEF$ verläuft. (2 BE)
- g) Im gegebenen Koordinatensystem wird der beschriebene Weg beim Sprung durch die Punkte $(0,3a|a|-0,05 \cdot (a - 2,61) \cdot (a - 13,39))$ mit geeigneten Werten von a dargestellt. Von Interesse ist die Weite des Sprungs, die in Abbildung 2 veranschaulicht ist. Bestimmen Sie die Weite des Sprungs auf zehntel Meter gerundet. (5 BE)

Lösungen**Aufgabe II 2**

- a) Das Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn im Punkt A ein rechter Winkel existiert.

$$\text{Kontrolle: } \overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

- b) Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{BC}$ haben die x_1 -Koordinate 0 und liegen in der x_2x_3 -Ebene.

Daher ist die x_2x_3 -Ebene eine Symmetrieebene des Körpers.

- c) Die Ebene AEFD ist parallel zur x_1 -Achse.

Die Koordinatengleichung einer Ebene, die parallel zur x_1 -Achse ist hat die Bauart $bx_2 + cx_3 = 0$, somit muss die erste Koordinate des Normalenvektors 0 sein.

- d) Der Schanzen Tisch hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ und die

Wasseroberflächenebene den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Winkelberechnung: } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{109} \cdot 1} = \frac{10}{\sqrt{109}} \Rightarrow \alpha = 16,7^\circ$$

- e) Links des Gleichheitszeichens steht der Vektorterm $\overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AE}$. Mit der Gleichung wird der Schnittpunkt der Geraden AE mit der Wasseroberfläche berechnet.

Das Ergebnis $r = \frac{1}{3}$ besagt, dass $\frac{1}{3}$ der Strecke $\overline{AE}$ unterhalb der Wasseroberfläche liegt.

Der Flächeninhalt des Rechtecks oberhalb der Wasseroberfläche berechnet sich

$$\text{mit } A_{\text{Werbefläche}} = \frac{2}{3} \cdot |\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{EF}| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{25 + 2,25} \cdot 4 \approx 13,9 \text{ m}^2$$

- f) Der Absprungpunkt V auf der Kante EF entspricht dem Schnittpunkt der Gerade EF und der Ebene L.

$$\text{Gleichung der Geraden EF: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt V von h mit der Ebene L:

$$10 \cdot (2 - 4s) - 3 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow 20 - 40s - 15 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{8}$$

Einsetzen des Wertes von s in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt V.

Dies ergibt $V(1,5 \mid 5 \mid 1)$

Da der Absprungpunkt V nicht auf der Symmetrieebene des Körpers liegt (dies ist die x_2x_3 -Ebene) verläuft der Weg im Modell nicht in der Symmetrieebene liegt.

- g) Die Koordinaten von $V(1,5 \mid 5 \mid 1)$ werden für $a = 5$ angenommen.

Der Punkt W liegt auf der Wasseroberfläche und hat die x_3 -Koordinate 0.

Damit gilt $-0,05 \cdot (a - 2,61) \cdot (a - 13,39) = 0$

Hier gibt es die Lösungen $a = 2,61$ und $a = 13,39$.

Für $a = 2,61$ ergibt sich der Punkt $M(0,783 \mid 2,61 \mid 0)$.

Für $a = 13,39$ ergibt sich der Punkt $N(4,017 \mid 13,39 \mid 0)$.

Da der gesuchte Punkt W einen größeren x_2 -Wert haben muss als der Punkt V kommt für den Punkt W nur der Punkt $W(4,017 \mid 13,39 \mid 0)$ infrage.

Die Weite des Sprungs entspricht dem Abstand von V und W ohne Berücksichtigung der x_3 -Koordinate.

Somit ist die Sprungweite $\sqrt{(4,017 - 1,5)^2 + (13,39 - 5)^2} \approx 8,8$ Meter