

Hauptprüfung Abiturprüfung 2026 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Teil B Analytische Geometrie – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

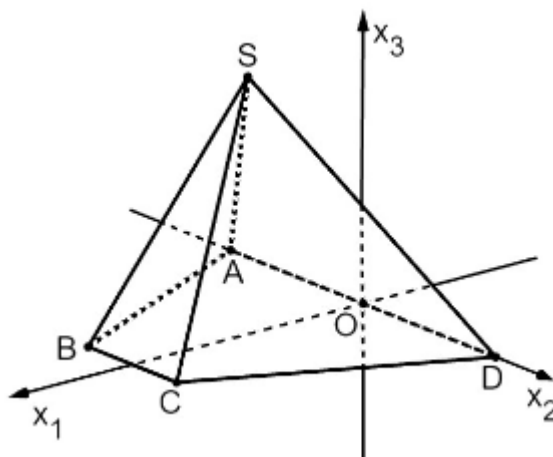
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe II 1

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS mit $A(0|-3|0)$, $B(4|-1|0)$, $C(4|1|0)$, $D(0|3|0)$ und $S(2|0|4)$.

- a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABCD ein Trapez ist, und berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (4 BE)



- b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kanten $\overline{CD}$ und $\overline{CS}$ einschließen. (3 BE)

Die Ebene L mit der Gleichung $-2x_1 + x_2 + 4 = 0$ schneidet die Kante $\overline{CD}$ im Punkt H.

- c) Berechnen Sie die Koordinaten von H.
(zur Kontrolle: $H(2,8|1,6|0)$) (4 BE)

Die Pyramide ABCDS wird um die Gerade CD um einen Winkel der Größe 360° gedreht. Dabei durchläuft die Spitze einen Kreis.

- d) Begründen Sie, dass dieser Kreis in der Ebene L liegt und H der Mittelpunkt des Kreises ist. (4 BE)

- e) Der Kreis, den die Spitze der Pyramide beschreibt, hat den Radius $\sqrt{19,2}$.

Beurteilen Sie folgende Aussage:

Während des Drehvorgangs gibt es eine Position der Pyramide, bei der ihre Spitze die x_2 -Koordinate 5,6 hat.

(5 BE)

Lösungen**Aufgabe II 1**

- a) Ein Trapez liegt vor, wenn ein Seitenpaar zueinander parallel ist.

Laut der Abbildung sind die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel zueinander.

Nachweis: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Vielfache zueinander, somit sind die

Seiten parallel.

Flächeninhalt des Trapezes: $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \cdot h = \frac{6+2}{2} \cdot 4 = 16 \text{ FE}$

Die Höhe der Pyramide ist die $h = 4$ (x_3 -Koordinate von S)

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 = \frac{64}{3} \text{ Volumeneinheiten}$$

- b) Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CS}$:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{CS}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow \alpha \approx 73,0^\circ$$

- c) Gleichung der Geraden durch CD:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunkts H der Gerade g mit der Ebene L:

$$-2 \cdot (4 - 4t) + 1 + 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow -8 + 8t + 2t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 0,3$$

Einsetzen von $t = 0,3$ in g ergibt den Schnittpunkt $H(2,8|1,6|0)$

- d) Die Ebene, in der der Kreis liegt, hat den Normalenvektor $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und enthält den Punkt $S(2|0|4)$.

Ansatz für die Koordinatengleichung: $-4x_1 + 2x_2 = d$

Einsetzen von $S(2|0|4)$ ergibt $d = -8$

Daraus ergibt sich die Ebene L: $-4x_1 + 2x_2 = -8 \quad |:2$

$-2x_1 + x_2 = -4$ was der Ebene L entspricht

Der Mittelpunkt des Kreises entspricht hierbei dem Schnittpunkt von L und der Gerade g durch CD.

Dies ist der Punkt H, wie in c) gezeigt wurde.

- e) Die gedrehte Spitze S^* der Pyramide muss in der Ebene L liegen.

Einsetzen von $x_2 = 5,6$ in L: $-2x_1 + 5,6 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4,8$

Daher hat S^* die Koordinaten $S^*(4,8 | 5,6 | x_3)$.

Da der Radius des Kreises $\sqrt{19,2}$ beträgt, muss gelten: $|\overrightarrow{HS^*}| = \sqrt{19,2}$

$$|\overrightarrow{HS^*}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ x_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + x_3^2} = \sqrt{20 + x_3^2}$$

Bedingung: $\sqrt{20 + x_3^2} = \sqrt{19,2}$ |quadrieren

$$\Rightarrow 20 + x_3^2 = 19,2 \Leftrightarrow x_3^2 = -0,8$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar.

Somit ist die Aussage falsch.