

Hauptprüfung Abiturprüfung 2026 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analysis – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

0Aufgabe I 2.1

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 0,016t \cdot e^{-0,005t}$.

Für $t \geq 0$ beschreibt f die

Wachstumsgeschwindigkeit des Horns einer Antilope (t in Tagen nach der Geburt des Tieres, $f(t)$ in Millimeter pro Tag).

Bei der Geburt des Tieres ist das Horn zwei Millimeter lang.

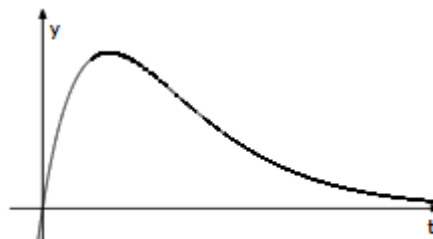


Abb. 1

- Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit an, die das Horn 20 Tage nach der Geburt des Tieres hat. (1 BE)
- Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. (4 BE)
- Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+100) = 2 \cdot f(t)$ führt. (2 BE)
- Die Funktion F mit $F(t) = -3,2 \cdot (200 + t) \cdot e^{-0,005t}$ ist eine Stammfunktion von f . Ermitteln Sie die Länge, die das Horn 120 Tage nach der Geburt des Tieres hat. (3 BE)

Bei einer anderen Antilope, die zum selben Zeitpunkt geboren wurde, lässt sich für $t \geq 0$ die Wachstumsgeschwindigkeit des Horns durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g beschreiben (t in Tagen nach der Geburt des Tieres, $g(t)$ in Millimeter pro Tag). Bei der Geburt dieses Tieres ist das Horn ebenfalls zwei Millimeter lang. Abbildung 2 zeigt die Graphen der Funktionen f und g .

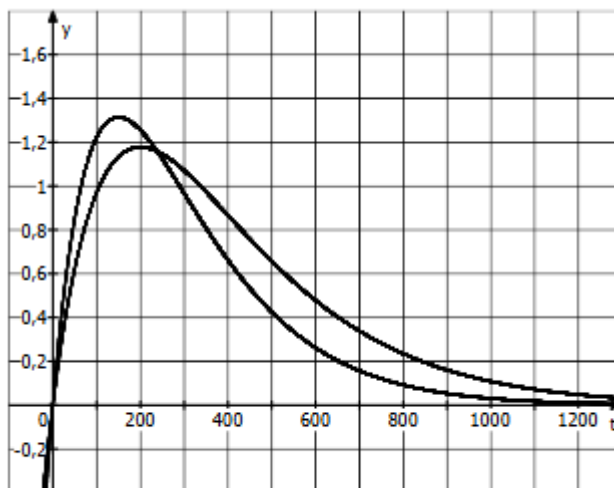


Abb. 2

- Betrachtet wird die Funktion d mit $d(t) = g(t) - f(t)$.
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von d im abgebildeten Bereich an und interpretieren Sie diese Nullstellen im Sachzusammenhang. (3 BE)
- Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt einen Zeitpunkt nach der Geburt der beiden Tiere, zu dem die Hörner der beiden Antilopen gleich lang sind. (2 BE)

Aufgabe I 2.2

Gegeben ist für jedes $a > 0$ eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h_a mit

$$h_a(x) = x^3 - 15ax^2 + 50a^2x.$$

Der Graph G_a von h_a verläuft durch die Punkte $O(0|0)$ und $P_a(5a|0)$.

- a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(1|1)$ auf G_a liegt.
(2 BE)
- b) Zeigen Sie, dass der Punkt $Q_a(8a|400a^3)$ auf der Tangente an G_a im Punkt O liegt.
(3 BE)
- c) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den das Dreieck OP_aQ_a gleichschenkelig ist.
(4 BE)

Aufgabe I 2.3

- a) Weisen Sie nach, dass für die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion w mit $w(x) = \sqrt{2x}$ gilt:
 $w(x) \cdot w'(x) = 1$
(2 BE)
- b) Für die in $\mathbb{R}^+$ zweimal differenzierbare Funktion v gilt $v(x) \cdot v'(x) = c$ mit $c > 0$.
Zeigen Sie, dass v weder Extremstellen noch Wendestellen besitzt.
(4 BE)

Lösungen**Aufgabe I 2.1**

- a) *Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit an, die das Horn 20 Tage nach der Geburt des Tieres hat.*

$$f(20) = 0,016 \cdot 20 \cdot e^{-0,005 \cdot 20} \approx 0,29$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit nach 20 Tagen beträgt 0,29 Millimeter pro Tag.

- b) *Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.*

Notwendige Bedingung für Hochpunkt: $f'(t) = 0$

$$f'(t) = 0,016 \cdot e^{-0,005t} + 0,016t \cdot e^{-0,005t} \cdot (-0,005) = 0,016e^{-0,005t} \cdot (1 - 0,005t)$$

$$0,016e^{-0,005t} \cdot (1 - 0,005t) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-0,005t} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $1 - 0,005t = 0 \Leftrightarrow t = 200$

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist nach $t = 200$ Tagen maximal.

Da bereits in der Aufgabe vorausgesetzt wurde, dass ein Maximum existiert, braucht die hinreichende Bedingung nicht geprüft werden.

- c) *Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t + 100) = 2 \cdot f(t)$ führt.*

Fragestellung: Bestimme das 100-Tages-Intervall, in dem sich die Wachstumsgeschwindigkeit verdoppelt.

- d) *Ermitteln Sie die Länge, die das Horn 120 Tage nach der Geburt des Tieres hat.*

$$2 + \int_0^{120} f(t) dt = 2 + \left[-3,2 \cdot (200 + t) \cdot e^{-0,005t} \right]_0^{120} = 2 + (-561,98 - (-640)) \approx 80 \text{ mm}$$

Nach 120 Tagen ist die Länge des Horns ca. 80 mm.

- e) *Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von d im abgebildeten Bereich an und interpretieren Sie diese Nullstellen im Sachzusammenhang.*

Das Schaubild von f hat bei $t = 200$ eine Maximumstelle.

Somit gehört das Schaubild mit der Maximumstelle bei $t = 200$ zur Funktion f und das andere zur Funktion g .

Die Nullstellen von $d(t)$ sind dort, wo $f(t) = g(t)$ gilt, also an den Schnittstellen der beiden Schaubilder.

Die Schaubilder in Abbildung 2 schneiden sich bei $t = 0$ und bei ungefähr $t = 240$. Es gibt somit zwei Nullstellen.

Interpretation. An den Nullstellen stimmen die Wachstumsgeschwindigkeiten der Hörner der beiden Antilopen überein.

- f) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt einen Zeitpunkt nach der Geburt der beiden Tiere, zu dem die Hörner der beiden Antilopen gleich lang sind.

Die Aussage ist wahr.

Begründung: Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben beide Hörner die gleiche Länge (2 mm).

Die Fläche A_1 zwischen den beiden Schaubildern im Intervall $[0;240]$ gibt den Längenunterschied der Hörner in mm an (die Antilope mit der Funktion g hat das längere Horn, da das Schaubild von g in dem Intervall oberhalb des Schaubildes von f liegt).

Nun kann man anschaulich erkennen, dass es einen Zeitpunkt $z > 240$ gibt, so dass die Fläche A_2 zwischen den beiden Schaubildern im Intervall $[240;z]$ genauso groß ist wie die Fläche A_1 .

Zum Zeitpunkt z hat die Antilope die zur Funktion f gehört den Längenvorsprung der Antilope der Funktion g wieder eingeholt und zum Zeitpunkt z haben daher beide Antilopen die gleiche Hornlänge.

Aufgabe I 2.2

- a) *Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(1|1)$ auf G_a liegt.*

$$h_a(1) = 1 \Leftrightarrow 1 - 15a + 50a^2 = 1 \Leftrightarrow 50a^2 - 15a = 0 \Leftrightarrow a \cdot (50a - 15) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

Gleichung I): $a = 0$ (ist keine Lösung, da $a > 0$)

Gleichung II): $50a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{15}{50} = 0,3$

- b) Zeigen Sie, dass der Punkt $Q_a(8a \mid 400a^3)$ auf der Tangente an G_a im Punkt O liegt.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = h'_a(u) \cdot (x - u) + h_a(u)$

Die Berührstelle ist bei $u = 0$:

$$y = h'_a(0) \cdot (x - 0) + h_a(0)$$

Es gilt $h_a(0) = 0$

Wegen $h'_a(x) = 3x^2 - 30ax + 50a^2$ gilt $h'_a(0) = 50a^2$

$$\text{Tangentengleichung: } y = 50a^2 \cdot (x - 0) + 0 \Leftrightarrow y = 50a^2 \cdot x$$

Einsetzen der Koordinaten von $Q_a(8a \mid 400a^3)$ in die Tangentengleichung:

$$400a^3 = 50a^2 \cdot 8a \text{ ist eine wahre Aussage}$$

Damit ist der Nachweis erbracht.

- c) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den das Dreieck OP_aQ_a gleichschenkelig ist.

Länge der Dreiecksseiten:

$$\overline{OP_a} = 5a$$

$$\overline{OQ_a} = \sqrt{(8a - 0)^2 + (400a^3)^2} = \sqrt{64a^2 + 160000a^6}$$

$$\overline{P_aQ_a} = \sqrt{(8a - 5a)^2 + (400a^3 - 0)^2} = \sqrt{9a^2 + 160000a^6} < \overline{OQ_a}$$

Es können nur die Seiten $\overline{OP_a}$ und $\overline{P_aQ_a}$ gleich sein.

Bedingung:

$$5a = \sqrt{9a^2 + 160000a^6} \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 25a^2 = 9a^2 + 160000a^6$$

$$\Leftrightarrow 0 = 160000a^6 - 16a^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 16a^2 \cdot (10000a^4 - 1) \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $16a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ kommt als Lösung nicht in Betracht wegen $a > 0$

$$\text{Gleichung II): } 10000a^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \pm 0,1$$

Wegen $a > 0$ kommt nur $a = 0,1$ in Frage.

Aufgabe I 2.3

- a) Weisen Sie nach, dass für die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion w mit $w(x) = \sqrt{2x}$ gilt:
 $w(x) \cdot w'(x) = 1$

$$\text{Wegen } w(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \text{ gilt } w'(x) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$w(x) \cdot w'(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \text{ was zu zeigen war}$$

- b) Zeigen Sie, dass v weder Extremstellen noch Wendestellen besitzt.

$$\text{Aus } v(x) \cdot v'(x) = c \text{ folgt } v'(x) = \frac{c}{v(x)}$$

$$\text{Notwendige Bedingung für Extremstelle: } v'(x) = \frac{c}{v(x)} = 0$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar, da der Zähler des Bruches nicht Null werden kann. Daher hat v keine Extremstelle.

$$\text{Wegen } v'(x) = \frac{c}{v(x)} = c \cdot (v(x))^{-1} \text{ folgt } v''(x) = -c \cdot (v(x))^{-2} \cdot v'(x) = \frac{-c \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\text{Notwendige Bedingung für Wendestelle: } v''(x) = \frac{-c \cdot v'(x)}{v(x)^2} = 0$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar, da der Zähler des Bruches nicht Null werden kann ($v'(x)$ kann nicht Null werden, siehe die Argumentation bei der Extremstelle)).

Daher hat v keine Wendestelle.