

Hauptprüfung Abiturprüfung 2026 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil B Analysis – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe I 1.1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Abbildung 1 in der Anlage zeigt G_a für $a = 0$.

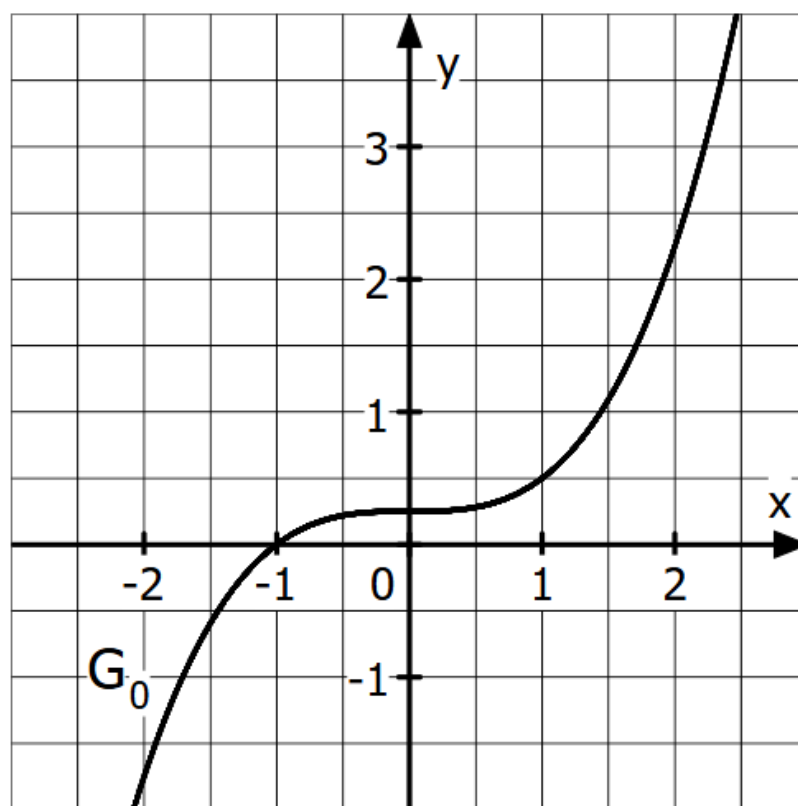
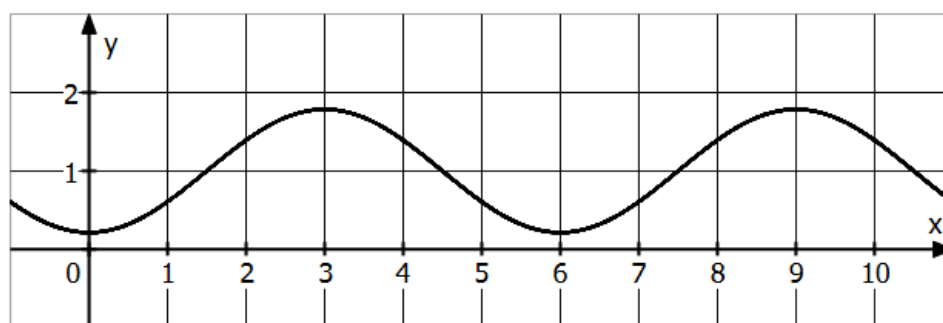
- a) Berechnen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(1|-1)$ auf G_a liegt, und zeigen Sie, dass dieser Punkt Wendepunkt dieses Graphen ist. (5 BE)
- b) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Graphen der Schar verlaufen, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte. (4 BE)
- c) Der Term einer Funktion der Schar kann in der Form $\frac{1}{4} \cdot (x+1)^3$ angegeben werden. Der Graph dieser Funktion kann durch Verschiebung aus G_0 erzeugt werden. Geben Sie eine passende Möglichkeit an. (2 BE)
- d) Betrachtet werden für jeden Wert $u > 0$ die Tangente t_u an G_0 im Punkt $P_u(u | f_0(u))$ sowie der Punkt $Q_u(u | 0)$. Die Tangente t_u schneidet die x -Achse in einem Punkt, der mit T_u bezeichnet wird. Begründen Sie mithilfe von geeigneten Eintragungen in Abbildung 1 in der Anlage, dass $|\overline{T_u Q_u}| = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$ für jeden Wert $u > 0$ gilt. (4 BE)
- e) Es gibt Kreise, deren Mittelpunkte auf der y -Achse liegen und die den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f_0 in genau zwei Punkten berühren. Der Punkt $A(1 | \frac{3}{4})$ ist ein Berührungspunkt eines solchen Kreises. Bestimmen Sie rechnerisch die y -Koordinate des Mittelpunktes dieses Kreises. (5 BE)

Aufgabe I 1.2

Betrachtet wird eine Wasserfontäne, bei der das Wasser aus einer Düse austritt. Die sich periodisch ändernde momentane Durchflussrate des Wassers an der Düse beeinflusst das Erscheinungsbild der Fontäne.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = -\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$ beschreibt im Folgenden für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an der Düse. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ die momentane Durchflussrate in Litern pro Sekunde. In Abbildung 2 in der Anlage ist der Graph von h dargestellt.

- a) Bestimmen Sie, wie oft die momentane Durchflussrate in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn ihren Maximalwert annimmt, und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt. (3 BE)
- b) Berechnen Sie $\int_5^9 h(x)dx$ und interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang. (4 BE)
- c) Betrachtet wird nun eine andere Düse, bei der sich die momentane Durchflussrate ebenfalls periodisch mit der Zeit ändert. Die maximale momentane Durchflussrate beträgt 2 Liter pro Sekunde und die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten der momentanen Durchflussrate ist 1,5-mal so groß wie bei der zuerst betrachteten Düse. Skizzieren Sie dazu passend in Abbildung 2 in der Anlage einen Graphen, der für $x \geq 0$ eine mögliche zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers für die nun betrachtete Düse beschreibt. (3 BE)

Abbildung 1 zu Aufgabe I 1.1**Abbildung 2 zu Aufgabe I 1.2**

Lösungen**Aufgabe I 1.1**

- a) Berechnen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(1|-1)$ auf G_a liegt, und zeigen Sie, dass dieser Punkt Wendepunkt dieses Graphen ist.

Es soll gelten: $f_a(1) = -1$

$$\frac{1}{4} \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + a \cdot 1 + \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow 2a + \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

Die zugehörige Funktionsgleichung ist $f_{-\frac{3}{4}}(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Nachweis, dass bei $x = 1$ eine Wendestelle vorliegt:

$$f'_{-\frac{3}{4}}(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad f''_{-\frac{3}{4}}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad f'''_{-\frac{3}{4}}(x) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Es gilt } f''_{-\frac{3}{4}}(1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{und} \quad f'''_{-\frac{3}{4}}(1) = \frac{3}{2} \neq 0$$

Damit liegt bei $x = 1$ eine Wendestelle vor.

- b) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Graphen der Schar verlaufen, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

Man wählt zunächst zwei konkrete Funktionen der Schar aus, zum Beispiel für $a = 0$ und $a = 1$ und berechnet die Schnittpunkte der zugehörigen Graphen.

$$\text{Es gilt } f_0(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad f_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{4}$$

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x \cdot (x + 1)$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt ergibt $x = 0$ und $x = -1$.

$$\text{Berechnung der y-Werte der Schnittpunkte: } f_0(0) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad f_0(-1) = 0$$

Die beiden Schaubilder schneiden sich in den Punkten $A(0 | \frac{1}{4})$ und $B(-1 | 0)$.

Nun muss noch geprüft werden, ob alle Graphen der Schar durch A und B verlaufen:

Kontrolle für A: $f_a(0) = \frac{1}{4}$, also liegt A auf allen Graphen der Schar

Kontrolle für B: $f_a(-1) = -\frac{1}{4} + a - a + \frac{1}{4} = 0$, also liegt B auf allen Graphen der Schar

Damit ist gezeigt, dass es genau zwei Punkte A und B gibt, die auf allen Graphen der Schar liegen.

c) *Geben Sie eine passende Möglichkeit an.*

Es ist $f_0(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{4}$ mit dem zugehörigen Graphen G_0 .

Der gegebene Funktionsterm lautet $g(x) = \frac{1}{4}(x+1)^3$

1.Schritt: Verschiebung von G_0 um $\frac{1}{4}$ LE nach unten in y-Richtung

(dies führt zum Term $\frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^3$)

2.Schritt: Verschiebung um 1 LE nach links in x-Richtung

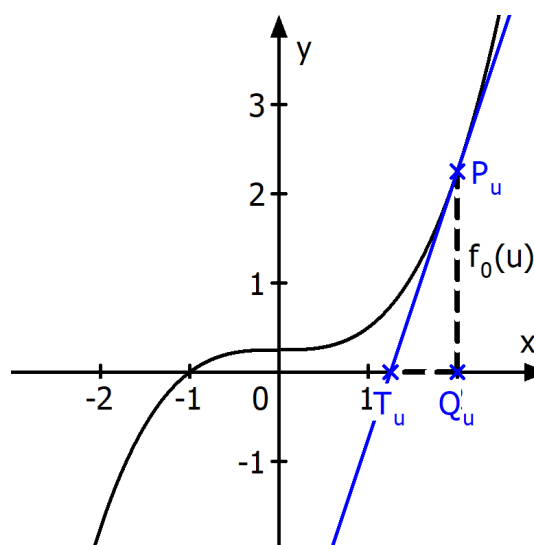
(dies führt zum Term $\frac{1}{4} \cdot (x+1)^3$)

d) *Begründen Sie mithilfe von geeigneten Eintragungen in Abbildung 1 in der*

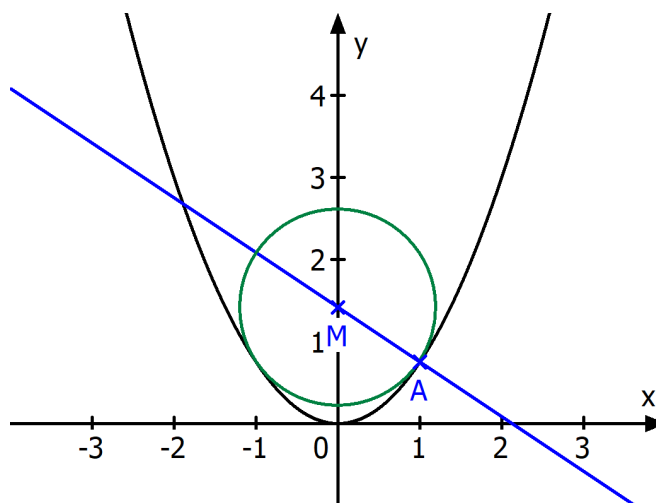
Anlage, dass $|\overline{T_u Q_u}| = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$ für jeden Wert $u > 0$ gilt.

$$|\overline{T_u Q_u}| = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)} \Leftrightarrow f'_0(u) = \frac{f_0(u)}{|\overline{T_u Q_u}|}$$

Begründung: $f'_0(u)$ entspricht der Steigung der Tangente im Punkt P_u .
Die Steigung wird grafisch mit einem Steigungsdreieck ermittelt.
Die senkrechte Strecke hat die Länge $f_0(u)$ und die waagrechte Strecke die Länge $|\overline{T_u Q_u}|$.



e) Bestimmen Sie rechnerisch die y-Koordinate des Mittelpunktes dieses Kreises.



Gleichung der ersten Ableitungsfunktion $f'_0(x) = g(x) = \frac{3}{4}x^2$

In der Skizze ist das Schaubild der Parabel eingezeichnet.

Um den Mittelpunkt M des Kreises zu ermitteln, muss vom Punkt A aus eine Normale an die Parabel angelegt werden, da im Falle der Berührung der Radius $\overline{MA}$ senkrecht zur Tangente an die Parabel im Punkt a steht.

Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{g'(u)} \cdot (x - u) + g(u)$

Normale im Punkt A ($u = 1$): $y = -\frac{1}{g'(1)} \cdot (x - 1) + g(1)$

Es gilt $g(1) = \frac{3}{4}$.

Wegen $g'(x) = \frac{3}{2}x$ gilt $g'(1) = \frac{3}{2}$.

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (x - 1) + \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{12}$

Die Normale schneidet die y-Achse im Punkt $M(0 \mid \frac{17}{12})$.

Die gesuchte y-Koordinate ist $\frac{17}{12}$.

Aufgabe I 1.2

- a) Bestimmen Sie, wie oft die momentane Durchflussrate in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn ihren Maximalwert annimmt, und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt.

Zu folgenden Zeitpunkten in der ersten Minute wird der Maximalwert angenommen: $x = 3 ; 9 ; 15 ; 21 ; 27 ; 33 ; 39 ; 45 ; 51 ; 57$

Es wird zehnmal der Maximalwert in der ersten Minute angenommen.

Ein Zeitpunkt, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt ist bei einer Wendestelle mit positiver Steigung.
Die Wendestelle ist beispielsweise bei $x = 1,5$.

- b) Berechnen Sie $\int_5^9 h(x)dx$ und interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

$$\begin{aligned} \int_5^9 \left(-\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1 \right) dx &= \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \frac{3}{\pi} + x \right]_5^9 = -\frac{3}{4} \cdot \sin(3\pi) + 9 - \left(-\frac{3}{4} \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) + 5 \right) \\ &= 9 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 5 \approx 3,35 \end{aligned}$$

Interpretation: Zwischen der 5. und 9. Sekunde tritt insgesamt 3,35 Liter aus der Düse aus.

- c) Skizzieren Sie dazu passend in Abbildung 2 in der Anlage einen Graphen, der für $x \geq 0$ eine mögliche zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers für die nun betrachtete Düse beschreibt.

Die gestrichelte Kurve ist der gesuchte Graph.

Die Hochpunkte haben den y-Wert 2.

Der Abstand der Maximalwerte war vorher 6 und ist nun $1,5 \cdot 6 = 9$.

