

Hauptprüfung Abiturprüfung 2026 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Teil A - Wahlaufgaben

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

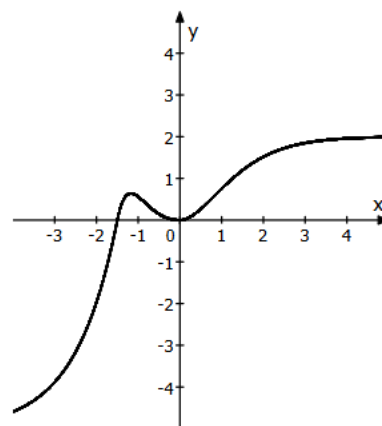
www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe W1: (5 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion f , die genau zwei Nullstellen hat: $-1,5$ und 0 . Betrachtet wird die

in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion J mit $J(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:
J hat genau zwei Nullstellen.

**Aufgabe W2: (1 BE und 4 BE)**

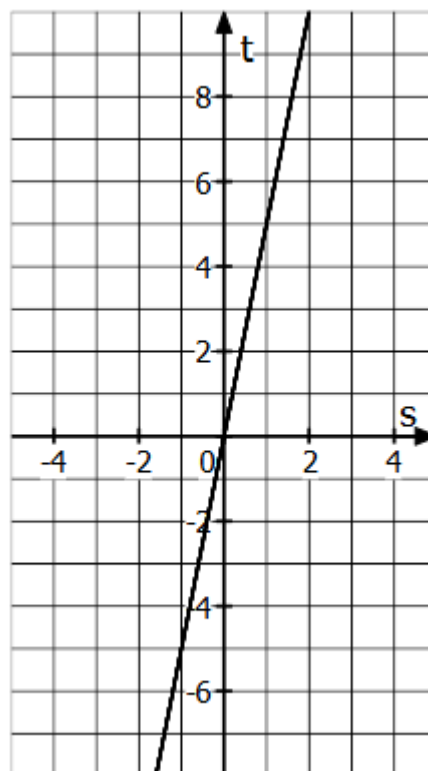
Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Wertemenge $[-3;2[$.

- Begründen Sie, dass der Graph von f nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.
- Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot f(x-5) + 1$.
Geben Sie die Wertemenge von h an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe W3: (2 BE und 3 BE)

Betrachtet werden die Dreiecke AB_sC_t mit $A(0|0|0)$, $B_s(4s|3s|0)$ und $C_t(0|0|t)$ mit $s, t \in \mathbb{R}^+$.

- Begründen Sie, dass jedes Dreieck AB_sC_t im Punkt A rechtwinklig ist.
- Zu jedem Wert von s gibt es einen Wert von t , so dass das Dreieck AB_sC_t gleichschenkelig ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Punkte $(s|t)$ auf der in der Abbildung dargestellten Gerade liegen.



Aufgabe W4: (1 BE und 4 BE)

Der Punkt $P(3|-1|4)$ liegt auf einer Kugel mit Mittelpunkt $M(1|1|2)$.

- Bestimmen Sie den Radius der Kugel.
- Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt P und schneidet die x_3 -Achse. Ermitteln Sie eine Gleichung von g .

Aufgabe W5: (1 BE und 4 BE)

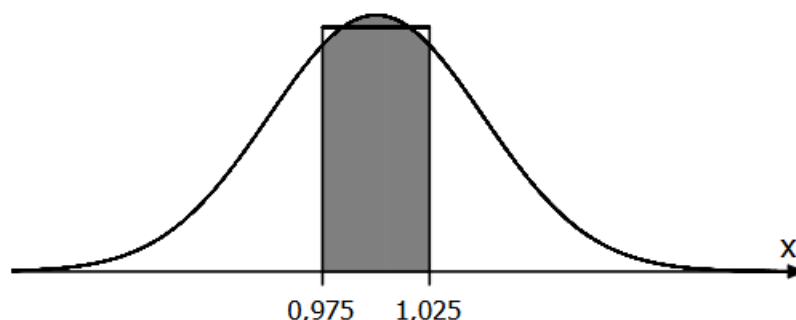
In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, die jeweils mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind. Auf drei Kugeln steht die Zahl a , auf den beiden anderen Kugeln die Zahl b . Die Summe von a und b ist 17. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig zufällig entnommen.

- Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ berechnet werden kann.
- Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der Zahlen auf den beiden entnommenen Kugeln. Der Erwartungswert von X ist 16. Bestimmen Sie a und b .

Aufgabe W6: (2 BE und 3 BE)

Eine normalverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Es gilt $P(X \geq 0,975) = 0,7$.

- Begründen Sie, dass $P(X \geq 1,025) = 0,3$ gilt.
- Die Abbildung zeigt den Graphen der zu X gehörenden Dichtefunktion φ .



Die markierte Fläche unter dem Graphen von φ und das eingezeichnete Rechteck haben den gleichen Inhalt. Zeigen Sie unter Verwendung der Abbildung, dass $\varphi(1) > 8$ ist.

Lösungen**Aufgabe W1:**

Die Integralfunktion $J(x) = \int_0^x f(t)dt$ hat bei $x = 0$ eine Nullstelle, da $\int_0^0 f(t)dt = 0$ ist.

Für $x > 0$ hat die Integralfunktion keine weitere Nullstelle.

Begründung: $J(x) = \int_0^x f(t)dt$ beschreibt für $x > 0$ den Inhalt der Fläche zwischen dem

Graphen von f und der x -Achse. Da sich die Fläche für $x > 0$ oberhalb der x -Achse befindet gilt $J(x) > 0$ für $x > 0$.

Für $x < 0$ hat die Integralfunktion genau eine Nullstelle:

Begründung: Bei $x = -1,5$ gilt $J(-1,5) = \int_0^{-1,5} f(t)dt = - \int_{-1,5}^0 f(t)dt < 0$, da durch den Tausch

der Integralgrenzen das Vorzeichen des Integrals negativ ist und sich die Fläche oberhalb der x -Achse befindet.

Für $x < -1,5$ gibt es eine Stelle $x = a$, für die gilt: $J(a) = \int_a^0 f(t)dt = 0$.

Die Stelle $x = a$ ist dort, wo der Flächeninhalt unterhalb der x -Achse im Intervall $[a; -1,5]$ genauso groß ist wie der Flächeninhalt oberhalb der x -Achse im Intervall $[-1,5; 0]$.

Für $x < a$ hat die Integralfunktion $J(x)$ keine weiteren Nullstellen, da der Graph von f unterhalb der x -Achse verläuft und die Integralfunktion $J(x)$ streng monoton fällt.

Fazit: Die Aussage ist wahr. $J(x)$ hat genau zwei Nullstellen $x = 0$ und $x = a$ mit $a < -1,5$.

Aufgabe W2:

a) Der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

Da $y = -3$ zur Wertemenge gehört, existiert ein x -Wert $x = a$, für den gilt: $f(a) = -3$

Aufgrund der Symmetrievoraussetzung gilt somit: $f(-a) = -f(a)$

Es muss also einen x -Wert $x = -a$ geben mit $f(-a) = -(-3) = 3$

Da $y = 3$ nicht zur Wertemenge gehört, kann der Graph von f nicht symmetrisch zum Ursprung sein.

b) $f(x)$ hat die Wertemenge $W = [-3; 2[$

$-2 \cdot f(x)$ hat die Wertemenge $W =]-4 ; 6]$

(Streckung mit dem Faktor -2 in y-Richtung bewirkt, dass jeder y-Wert mit -2 multipliziert wird)

$-2 \cdot f(x - 5)$ hat die Wertemenge $W =]-4; 6]$

(Verschiebung um 5 nach rechts bewirkt keine Änderung der Wertemenge)

$-2 \cdot f(x - 5) + 1$ hat die Wertemenge $W =]-3 ; 7]$

(Verschiebung um 1 nach oben erhöht jeden y-Wert um 1)

Aufgabe W3:

a) Das Dreieck ist im Punkt A rechtwinklig, wenn $\overrightarrow{AB_s} \circ \overrightarrow{AC_t} = 0$ gilt.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{AB_s} = \begin{pmatrix} 4s \\ 3s \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB_s} \circ \overrightarrow{AC_t} = 4s \cdot 0 + 3s \cdot 0 + 0 \cdot t = 0 \text{ was zu zeigen war.}$$

b) Da das Dreieck im Punkt A rechtwinklig ist, müssen bei Gleichschenkligkeit die Seiten $\overrightarrow{AB_s}$ und $\overrightarrow{AC_t}$ gleich lang sein.

$$|\overrightarrow{AB_s}| = \sqrt{16s^2 + 9s^2} = \sqrt{25s^2} = 5 \cdot |s| = 5s, \text{ da } s > 0 \text{ ist.}$$

$$|\overrightarrow{AC_t}| = \sqrt{t^2} = |t| = t, \text{ da } t > 0 \text{ ist.}$$

Aufgrund der Gleichschenkligkeit gilt: $t = 5s$

In dem Koordinatensystem ist die Gerade $y = 5x$ eingezeichnet (Steigung 5 und y-Achsenabschnitt 0).

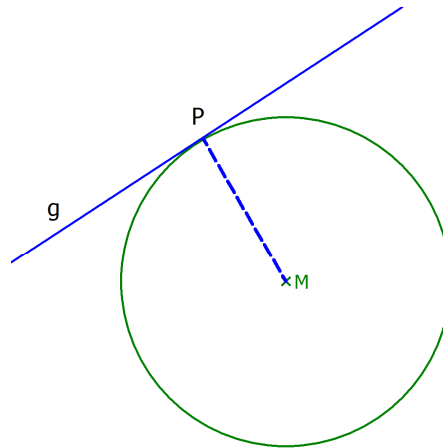
Da s die Rolle von x und t die Rolle von y hat, gilt $t = 5s$.
Damit liegen die zugehörigen Punkte $(s|t)$ auf der Gerade.

Aufgabe W4:

a) Der Radius der Kugel ist der Abstand des Punktes M vom Punkt P.

$$\text{Radius} = |\overrightarrow{MP}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

b) Die Gerade verläuft durch den Punkt P(3|-1|4) und durch einen Punkt Z(0|0|z) mit der x_3 -Achse.



$$\text{Gleichung der Geraden: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ z-4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Gerade steht senkrecht zum Vektor } \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Bedingung: } \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ z-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2 + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow z = 8$$

$$\text{Die gesuchte Gerade lautet } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe W5:

- a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass beide gezogenen Kugeln die Aufschrift „b“ haben.

$1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und somit die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Kugel die Aufschrift „b“ hat.

- b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X sieht so aus:

$$P(X = 2b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 2a) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = a + b) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$E(X) = 2b \cdot \frac{1}{10} + 2a \cdot \frac{3}{10} + (a + b) \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{5}a + \frac{4}{5}b$$

Nun soll gelten:

$$(1) \ a + b = 17$$

$$(2) \ \frac{6}{5}a + \frac{4}{5}b = 16$$

Aus (1) folgt: $b = 17 - a$ in (2)

$$\frac{6}{5}a + \frac{4}{5}(17 - a) = 16 \Leftrightarrow \frac{2}{5}a + 13,6 = 16 \Leftrightarrow \frac{2}{5}a = 2,4 \Leftrightarrow a = 6$$

Daraus folgt $b = 17 - 6 = 11$

Aufgabe W6:

a) Aus $P(X \geq 0,975) = 0,7$ folgt $P(X \leq 0,975) = 1 - 0,7 = 0,3$

Da aus Symmetriegründen der Dichtefunktion $P(X \leq 0,975) = P(X \geq 1,025)$ ist, folgt daraus $P(X \geq 1,025) = 0,3$

b) Aus $P(X \leq 0,975) = P(X \geq 1,025) = 0,3$ folgt

$$P(0,975 \leq X \leq 1,025) = 1 - 2 \cdot 0,3 = 0,4$$

Die grau markierte Fläche hat daher den Inhalt $A = 0,4$.

Das Rechteck hat eine Länge von $1,025 - 0,975 = 0,05$.

Aus der Flächenformel des Rechtecks folgt: $0,4 = 0,05 \cdot b_{\text{Rechteck}} \Leftrightarrow b_{\text{Rechteck}} = 8$

Da die Breite des Rechtecks 8 LE ist und bei $x = 1$ die Maximumstelle der Dichtefunktion ist (1 ist der Erwartungswert) und der Hochpunkt oberhalb des Rechtecks liegt, muss $\varphi(1) > 8$ sein.