

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2026

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_g .

- 3.1 a) Zeichnen Sie K_g für $-\pi \leq x \leq 5\pi$.
b) Zeigen Sie, dass der Punkt $W(\pi | 1)$ ein Wendepunkt von K_g ist.
c) Bestimmen Sie die Wendepunkte von K_g im Intervall $[6\pi; 10\pi]$.
(10 Punkte)

Ein Riesenrad auf einem Jahrmarkt dreht sich gleichmäßig. Die Höhe einer Gondel über dem Boden wird durch $h(t) = -25 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 26$ beschrieben, wobei $t \geq 0$ die Zeit in Minuten und $h(t)$ die Höhe in Metern angibt.

- 3.2 a) Bestimmen Sie die Amplitude und die Periode der Funktion h .
b) Geben Sie die maximale und minimale Höhe der Gondel über dem Boden an.
c) Berechnen Sie die Höhe der Gondel zum Zeitpunkt $t = 1,5$.
d) Bestimmen Sie die Zeitpunkte t mit $t \in [0; 4]$, zu denen sich die Gondel 26 Meter über dem Boden befindet.
(10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

- 3.3 a) Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_f an.
b) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion f .
(4 Punkte)

3.4 Die Funktion f hat eine Stammfunktion F und eine Ableitungsfunktion f' . Beurteilen Sie, ob die Aussagen wahr beziehungsweise falsch sind.

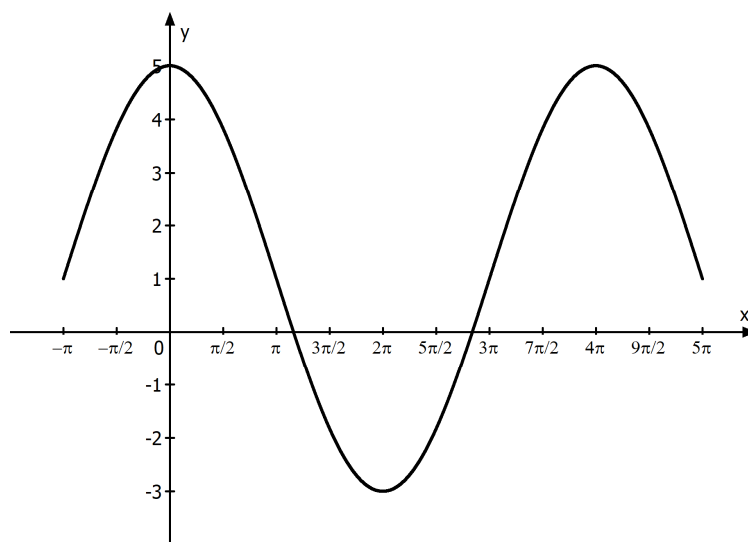
- (1) Die Gleichung $f(x) = 0$ hat keine Lösung.
(2) F ist auf dem Intervall $[1; 2]$ monoton fallend.
(3) $f'(x) \cdot e^2 = f'(x+1)$
(6 Punkte)

Lösung

3.1

a)

Zeichnung:

Die Höhe der waagrechten Mittellinie ist bei $y = 1$.Die Amplitude ist $a = 4$ und die Periode ist $p = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

- b) Es gilt $g'(x) = -4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ und $g''(x) = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
 und $g'''(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Wegen $g''(\pi) = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ und $g'''(\pi) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2} \neq 0$ liegt bei $x = \pi$ eine Wendestelle vor.

Wegen $g(\pi) = 4 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 1 = 1$ ist $W(\pi | 1)$ ein Wendepunkt von K_g .

- c) Die Wendepunkte des Schaubildes von g liegen auf Höhe der Mittellinie $y = 1$ und haben den Abstand einer halben Periode 2π .

Daher liegen die Wendepunkte bei $x = 3\pi$ und $x = 5\pi$ und $x = 7\pi$ und $x = 9\pi$. Die gesuchten Wendepunkte in dem angegebenen Intervall haben daher die Koordinaten $W_2(7\pi | 1)$ und $W_3(9\pi | 1)$.

3.2

- a) Die Amplitude ist $a = 25$. Die Periode von h ist $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
- b) Die waagrechte Mittellinie des Schaubildes liegt auf der Höhe $y = 26$. Die Amplitude 25 gibt den maximalen Ausschlag nach oben und unten ausgehend von der Mittellinie an.

Die maximale Höhe der Gondel ist daher $h_{\max} = 26 + 25 = 51$ Meter

Die minimale Höhe der Gondel ist daher $h_{\min} = 26 - 25 = 1$ Meter

- c) Es gilt $h(1,5) = -25 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1,5\right) + 26 \approx 43,7$
Die Höhe der Gondel beträgt ca. 43,7 Meter.

- d) Bedingung: $h(t) = 26$

$$26 = -25 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 26 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$$

Substitution: $u = \frac{\pi}{2}t$

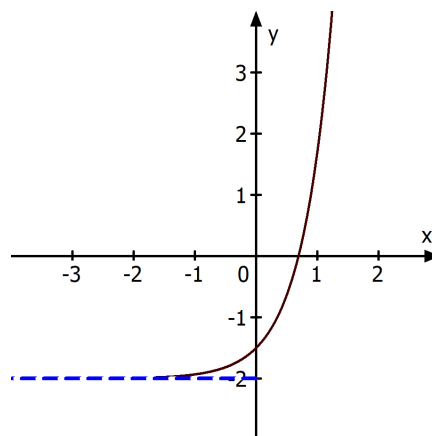
$$\cos(u) = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{2} \text{ und } u_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ und } u_3 = \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{Rücksubstitution: } \frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \quad \frac{\pi}{2}t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 3 \quad \frac{\pi}{2}t = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow t = 5$$

Im angegebenen Intervall befindet sich die Gondel zu den Zeitpunkten $t = 1$ Minute und $t = 3$ Minuten 26 m über dem Boden.

3.3

- a) Die Gleichung der waagrechten Asymptote lautet $y = -2$. Diese existiert für $x \rightarrow -\infty$.
- b) Um den Wertebereich zu erhalten, ist eine Skizze des Schaubildes von f hilfreich (unter Nutzung einer Wertetabelle mit dem Taschenrechner)



Der Wertebereich (die Menge aller y -Werte) ist $W =]-2; +\infty[$

3.4

$$(1) \quad f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2}$$

Die Aussage ist falsch, da die Gleichung eine Lösung hat.

Man könnte die Aussage auch anschaulich prüfen anhand des Schaubildes aus Aufgabe 3.3. Das Schaubild von f hat eine Nullstelle, somit hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung.

- (2) F ist auf dem Intervall $[1;2]$ monoton fallend, wenn $F'(x) = f(x) < 0$ ist auf dem Intervall $[1;2]$.

Aus der Abbildung in 3.3 erkennt man, dass das Schaubild von f im Intervall $[1;2]$ oberhalb der x -Achse liegt und damit $f(x) > 0$ ist.

Die Aussage ist falsch.

$$(3) \quad \text{Es gilt } f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}.$$

$$\text{Linke Seite der Gleichung: } f'(x) \cdot e^2 = e^{2x} \cdot e^2 = e^{2x+2}$$

$$\text{Rechte Seite der Gleichung: } f'(x+1) = e^{2(x+1)} = e^{2x+2}$$

Da beide Seiten der Gleichung zu demselben Ergebnis führen, ist die Aussage wahr.