

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2026

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

- 2.1 Das Schaubild einer Polynomfunktion p vom Grad 4 hat den Sattelpunkt $S(0|1)$ und verläuft durch die Punkte $P(1|-2)$ und $Q(-2|1)$.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p . (7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung zeigt ihr Schaubild K_f .

- 2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_f . (4 Punkte)

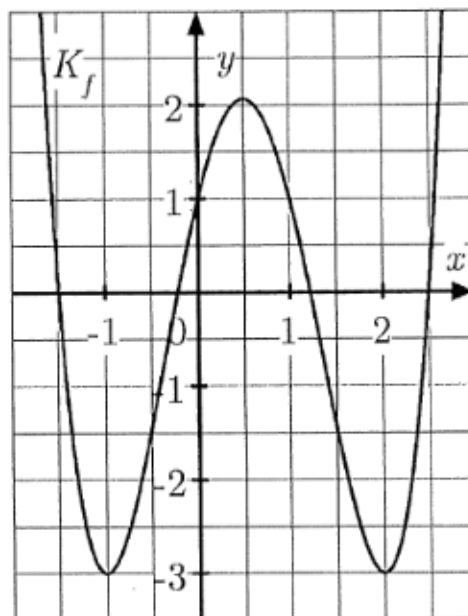
- 2.3 Beurteilen Sie mit Hilfe des Schaubildes, ob die Aussagen wahr beziehungsweise falsch sind:

(1) $f'(2) = 0$

(2) $f''(2) > 0$

(3) $\int_{-1,5}^{2,5} f(x) dx = 0$

- (4) Das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat für $x = 2,5$ einen Hochpunkt.



(6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 8e^{-0,25x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_g .

- 2.4 a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_g mit den Koordinatenachsen.
b) Zeichnen Sie K_g für $-0,5 \leq x \leq 6,5$.

(6 Punkte)

- 2.5 a) Zeichnen Sie die Gerade t mit $y = -2x + 6$ in Ihr Schaubild aus 2.4 ein.
b) Zeigen Sie, dass t eine Tangente an K_g ist.
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Geraden t , der Kurve K_g und der Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird.

(7 Punkte)

Lösung

- 2.1 Ansatz für die Polynomfunktion: $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 Es gilt $p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ und $p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Bedingungen:

Sattelpunkt in $S(0|1)$: $p(0) = 1 \Rightarrow e = 1$

$$p''(0) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$p'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

Begründung: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung 0.

$$P(1|-2): p(1) = -2 \Rightarrow a + b + c + d + e = -2$$

$$Q(-2|1): p(-2) = 1 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + e = 1$$

Einsetzen der bekannten Werte für c, d und e in die letzten beiden Gleichungen ergibt:

$$a + b + 1 = -2 \Rightarrow a + b = -3 \quad (1)$$

$$16a - 8b + 1 = 1 \Rightarrow 16a - 8b = 0 \quad (2)$$

Aus (2) folgt $b = 2a$ (3)

$$\text{Einsetzen in (1): } a + 2a = -3 \Leftrightarrow 3a = -3 \Leftrightarrow a = -1$$

$a = -1$ in (3) eingesetzt ergibt $b = -2$.

Die gesuchte Funktion lautet $p(x) = -x^4 - 2x^3 + 1$

- 2.2 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es gilt $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$ und $f''(x) = 12x^2 - 12x - 6$ und $f'''(x) = 24x - 12$

$$12x^2 - 12x - 6 = 0$$

$$\text{Lösung mit der abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 12 \cdot (-6)}}{24} = \frac{12 \pm \sqrt{432}}{24}$$

$$x_1 \approx \frac{12 + 20,8}{24} = 1,37 \quad \text{und} \quad x_2 \approx \frac{12 - 20,8}{24} = -0,37$$

Wegen $f'''(1,37) \neq 0$ und $f(1,37) \approx -0,77$ gilt $W_1(1,37 | -0,77)$

Wegen $f'''(-0,37) \neq 0$ und $f(-0,37) \approx -0,77$ gilt $W_2(-0,37 | -0,77)$

2.3

- (1) $f'(2) = 0$ ist wahr, weil das Schaubild von f bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente besitzt.
- (2) $f''(2) > 0$ ist wahr, weil das Schaubild von f bei $x = 2$ linksgekrümmt ist.
- (3) $\int_{-1,5}^{2,5} f(x) dx = 0$ ist falsch, da die beiden Flächenstücke unterhalb der x -Achse insgesamt größer sind als das Flächenstück oberhalb der x -Achse.
- (4) Die Aussage ist falsch, da das Schaubild von f bei $x = 2,5$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ besitzt. Somit hat das Schaubild jeder Stammfunktion von f bei $x = 2,5$ einen Tiefpunkt.

2.4

- a) Schnittpunkt mit der y -Achse: $g(0) = 6$ also gilt $S_y(0 | 6)$

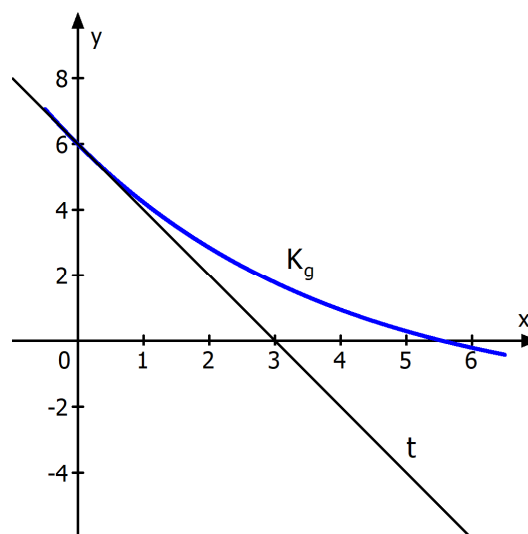
Schnittpunkt mit der x -Achse: $g(x) = 0$

$$8e^{-0,25x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,25x} = 0,25 \Leftrightarrow -0,25x = \ln(0,25) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(0,25)}{-0,25}$$

Schnittpunkt mit der x -Achse: $N\left(\frac{\ln(0,25)}{-0,25} \mid 0\right)$ oder $N(-4 \cdot \ln(0,25) \mid 0)$

- b) Zeichnung: (inklusive der Geraden t aus der Aufgabe 2.5)

Die Zeichnung erfolgt mit Hilfe einer Wertetabelle, die mit dem Taschenrechner erstellt werden kann:



2.5

- a) Siehe Zeichnung in Aufgabe 2.4 b)
- b) Man kann anhand der Abbildung in 2.4 b) vermuten, dass die Gerade $t(x) = -2x + 6$ das Schaubild von g an der Stelle $x = 0$ berührt.

Rechnerischer Nachweis:

Es gilt $t(0) = g(0) = 6$, somit ist $S_y(0 | 6)$ ein gemeinsamer Punkt

Wegen $g'(x) = -2e^{-0,25x}$ gilt $g'(0) = -2$.

Da auch $t'(0) = -2$ ist, haben beide Schaubilder bei $x = 0$ die gleiche Steigung.

Damit ist t eine Tangente an das Schaubild von g .

c)

$$\int_0^4 (g(x) - t(x)) dx = \int_0^4 (8e^{-0,25x} - 2 - (-2x + 6)) dx = \int_0^4 (8e^{-0,25x} + 2x - 8) dx$$

$$= \left[-\frac{8}{0,25} e^{-0,25x} + x^2 - 8x \right]_0^4 = -32e^{-1} + 16 - 32 - (-32) \approx 4,23$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt $A = 4,23$ FE.