

Lösungen zu Potenzen

Gymnasium

Klasse 9 / 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2020

Aufgabe 1:

$$a) 7^{-2} : 7^{-4} = 7^{-2-(-4)} = 7^2 = 49$$

$$b) 9^{-4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} = 9^{-4} \cdot 9^3 = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

$$c) \frac{a^6}{b^{m+3}} : \frac{a^8}{b^{m+4}} = \frac{a^6}{b^{m+3}} \cdot \frac{b^{m+4}}{a^8} = b^{m+4-(m+3)} \cdot a^{6-8} = b \cdot a^{-2}$$

$$d) \frac{14^3 \cdot 15^5}{25^5 \cdot 28^4} = \frac{(7 \cdot 2)^3 \cdot (5 \cdot 3)^5}{(5^2)^5 \cdot (7 \cdot 2^2)^4} = \frac{7^3 \cdot 2^3 \cdot 5^5 \cdot 3^5}{5^{10} \cdot 7^4 \cdot 2^8} = \frac{3^5}{7 \cdot 2^5 \cdot 5^5}$$

$$e) \frac{27^6 - 3^{15}}{6 \cdot 3^{12}} = \frac{(3^3)^6 - 3^{15}}{2 \cdot 3 \cdot 3^{12}} = \frac{3^{18} - 3^{15}}{2 \cdot 3^{13}} = \frac{3^{15}(3^3 - 1)}{2 \cdot 3^{13}} = \frac{3^2 \cdot (3^3 - 1)}{2} = 9 \cdot 13 = 117$$

Aufgabe 2:

$$a) 49^5 = 7^5 \cdot 7^5 = 7^{10}$$

$$b) \sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}} = (2^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}$$

$$c) \sqrt[4]{\frac{1}{25}} = (5^{-2})^{\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{2}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}}$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}} = \frac{9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{6}}$$

Aufgabe 3:

$$a) 2^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}} + 54^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$b) 25 \cdot 2^{n+2} + 28 \cdot 2^n = 25 \cdot 2^n \cdot 2^2 + 28 \cdot 2^n = 2^n \cdot (100 + 28) = 2^n \cdot 128 = 2^n \cdot 2^7 = 2^{n+7}$$

$$c) \frac{32 \cdot 2^{n-4}}{2^{n-1}} = \frac{2^5 \cdot 2^{n-4}}{2^{n-1}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n-1}} = 2^{n+1-(n-1)} = 2^2$$

$$d) \sqrt[3]{a^5 b} \cdot \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{a^5 b \cdot ab^2} = \sqrt[3]{a^6 b^3} = (a^6 \cdot b^3)^{\frac{1}{3}} = a^2 \cdot b$$

Aufgabe 4:

$$a) \frac{(10a)^{21} \cdot 6^{27}}{81^7 \cdot (400a^2)^{11}} = \frac{10^{21} a^{21} \cdot 3^{27} \cdot 2^{27}}{(3^4)^7 \cdot 4^{11} \cdot 100^{11} \cdot a^{22}} = \frac{10^{21} \cdot 3^{27} \cdot 2^{27}}{3^{28} \cdot 2^{22} \cdot 10^{22} \cdot a} = \frac{2^5}{3 \cdot 10} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15}$$

$$b) \frac{49^4 \cdot 12^9}{(6^2 \cdot 14^3)^3 \cdot 27} = \frac{7^4 \cdot 7^4 \cdot 3^9 \cdot 2^9 \cdot 2^9}{6^6 \cdot 14^9 \cdot 3^3} = \frac{7^8 \cdot 3^9 \cdot 2^{18}}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 2^9 \cdot 7^9 \cdot 3^3} = \frac{2^3}{7} = \frac{8}{7}$$

$$c) \frac{16 \cdot 3^5 \cdot 25^8}{(15^3 \cdot 4)^2 \cdot 5^9} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot (5^2)^8}{15^6 \cdot 4^2 \cdot 5^9} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^{16}}{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^4 \cdot 5^9} = \frac{5}{3}$$

- d) $\frac{(2^4 \cdot 15^3)^2}{5^8 \cdot 7^2 \cdot 12^6} = \frac{2^8 \cdot 15^6}{5^8 \cdot 7^2 \cdot 2^6 \cdot 3^6} = \frac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^6}{5^8 \cdot 7^2 \cdot 2^{12} \cdot 3^6} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$
- e) $\frac{a^{-3} \cdot b^7 \cdot c^5}{a^2 \cdot b^{-4} \cdot c} : \frac{a \cdot b^{-5} \cdot c^2}{a^8 \cdot b^{-2} \cdot c^{-1}} = \frac{a^{-3} \cdot b^7 \cdot c^5}{a^2 \cdot b^{-4} \cdot c} \cdot \frac{a^8 \cdot b^{-2} \cdot c^{-1}}{a \cdot b^{-5} \cdot c^2} = \frac{a^5 \cdot b^5 \cdot c^4}{a^3 \cdot b^{-9} \cdot c^3} = a^2 \cdot b^{14} \cdot c$
- f) $\frac{(3^5 \cdot 5^4 \cdot 22^3)^2 \cdot 2^5}{11^5 \cdot 6^{11} \cdot 25^4} = \frac{3^{10} \cdot 5^8 \cdot 22^6 \cdot 2^5}{11^5 \cdot 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^4 \cdot 5^4} = \frac{3^{10} \cdot 5^8 \cdot 11^6 \cdot 2^6 \cdot 2^5}{11^5 \cdot 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^8} = \frac{11}{3}$
- g) $\frac{(21^2 \cdot a^3)^5}{(7^5 \cdot a^4)^2} = \frac{21^{10} \cdot a^{15}}{7^{10} \cdot a^8} = \frac{3^{10} \cdot 7^{10} \cdot a^7}{7^{10}} = 3^{10} \cdot a^7$
- h) $\frac{3 \cdot 4^{x+2} - 4^{x+3}}{20 \cdot 4^{x+1}} = \frac{4^{x+1} \cdot (3 \cdot 4^1 - 4^2)}{20 \cdot 4^{x+1}} = \frac{12 - 16}{20} = -\frac{1}{5}$
- i) $\frac{6 \cdot (3xy^2)^3}{(9x^2y^3)^2} = \frac{6 \cdot 3^3 \cdot x^3 \cdot y^6}{9^2 \cdot x^4 \cdot y^6} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3^3}{3^4 \cdot x} = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$
- j) $\frac{a^x - a^{x+2}}{a^{x+1} - a^x} = \frac{a^x(1 - a^2)}{a^x(a - 1)} = \frac{(1 - a) \cdot (1 + a)}{a - 1} = \frac{(1 - a)(1 + a)}{-(1 - a)} = -(1 + a)$
- k) $\left[\frac{b^3}{a^{n-2}} : \frac{b^5}{c^{2n}} \right] : \frac{c^{2n}}{a^{n+3}} = \frac{b^3 \cdot c^{2n}}{a^{n-2} \cdot b^5} \cdot \frac{a^{n+3}}{c^{2n}} = \frac{a^5}{b^2}$
- l) $\frac{4^n \cdot 25^{n+1}}{10^{2n+1}} = \frac{4^n \cdot 25^n \cdot 25^1}{10^{2n} \cdot 10^1} = \frac{100^n \cdot 25}{10^{2n} \cdot 10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$
- m) $\frac{a^{-5} \cdot b^2}{c^{-2} \cdot a^3} : \frac{c^4 \cdot b^3}{b \cdot a^8} = \frac{a^{-8} \cdot b^2}{c^{-2}} \cdot \frac{b \cdot a^8}{c^4 \cdot b^3} = \frac{b^3}{c^2 \cdot b^3} = \frac{1}{c^2} = c^{-2}$
- n) $\frac{(a^2c)^2}{a^2c^2 + bc^2} - \frac{b^2}{a^2 + b} = \frac{a^4c^2}{c^2(a^2 + b)} - \frac{b^2}{a^2 + b} = \frac{a^4 - b^2}{a^2 + b} = \frac{(a^2 + b)(a^2 - b)}{a^2 + b} = a^2 - b$
- o) $\frac{4^{n+1} + 12 \cdot 4^n}{4^{n+2} - 4^{n+1}} = \frac{4^n(4 + 12)}{4^{n+1}(4 - 1)} = \frac{16}{4 \cdot 3} = \frac{4}{3}$
- p) $\frac{20 \cdot 5^{n+2} + 25 \cdot 5^{n+1}}{(\sqrt[n]{25})^{2n}} = \frac{20 \cdot 5^2 \cdot 5^n + 25 \cdot 5 \cdot 5^n}{25^2} = \frac{25 \cdot 5^n(20 + 5)}{5^4} = \frac{5^n \cdot 25 \cdot 25}{5^4} = 5^n$
- q) $\frac{5^{n+2} + 2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^n - 5^{n+1}} = \frac{5^n \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^n - 5^n \cdot 5^1} = \frac{5^n \cdot (5^2 + 2)}{5^n \cdot (2 - 5)} = \frac{27}{-3} = -9$
- r) $\frac{b^3 - a^2b}{2ab + b^2} = \frac{b \cdot (b^2 - a^2)}{2b(a + b)} = \frac{b \cdot (b - a)(b + a)}{2b(a + b)} = \frac{b - a}{2}$

Aufgabe 5:

$$a) 24 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+4} = 24 \cdot 2^n \cdot 2 - 3 \cdot 2^n \cdot 2^4 = 2^n \cdot (48 - 48) = 0$$

$$b) \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^2$$

$$c) \sqrt[4]{ab^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{a^5b^4} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{4}{6}} = a^{\frac{7}{4}} \cdot b^{\frac{5}{2}}$$

Aufgabe 6:

$$a) \frac{(3x^5y^{-2})^3}{(27x^{-1}y^3)^{-1}} = \frac{3^3 x^{15} y^{-6}}{(3^3)^{-1} x^1 y^{-3}} = \frac{3^3 \cdot x^{15} y^{-6}}{3^{-3} x^1 y^{-3}} = 3^6 \cdot x^{14} \cdot y^{-3}$$

$$b) (5x)^{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{25x^2} = \frac{5^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{(5^2)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = 5^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}}$$

$$c) \frac{(u-v)^{-2} \cdot (u+v)^{-1}}{(u^2-v^2)^{-2} \cdot (u+v)} = \frac{(u^2-v^2)^2}{(u-v)^2 (u+v)^1 \cdot (u+v)} = \frac{((u+v) \cdot (u-v))^2}{(u-v)^2 \cdot (u+v)^2} = \frac{(u+v)^2 (u-v)^2}{(u-v)^2 \cdot (u+v)^2} = 1$$

$$d) \frac{4x^n - x^{n+2}}{x^{n+1} + 2x^n} = \frac{x^n \cdot (4 - x^2)}{x^n \cdot (x + 2)} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)} = 2-x$$

$$e) \sqrt[4]{3^{2n+8}} - 2 \cdot \sqrt[4]{3^{2n+4}} = 3^{0,5n+2} - 2 \cdot 3^{0,5n+1} = 9 \cdot 3^{0,5n} - 6 \cdot 3^{0,5n} = 3 \cdot 3^{0,5n}$$

Aufgabe 7:

$$a) 7 \cdot 5^{n+1} - 16 \cdot 5^n - 92 \cdot 5^{n-1} = 5^{n-1} \cdot (7 \cdot 5^2 - 16 \cdot 5 - 92) = 5^{n-1} \cdot 3$$

$$b) \left(\frac{3a^{-2}b^3}{4a^3b^{-2}} \right)^2 : \left(\frac{2b^{-4}}{3a^{-2}} \right)^{-3} = \frac{3^2 \cdot a^{-4}b^6}{4^2 \cdot a^6b^{-4}} \cdot \frac{3^{-3} \cdot a^6}{2^{-3} \cdot b^{12}} = \frac{3^{-1}a^2b^6}{2a^6b^8} = \frac{1}{6}a^{-4}b^{-2}$$

$$c) a^{-n}b^{-2} \cdot a^{2n}b^n = a^n \cdot b^{n-2}$$

$$d) \frac{a^{n-1}b^{-n}}{a^{1-2n}b^n} = a^{n-1-(1-2n)} \cdot b^{-n-n} = a^{3n-2} \cdot b^{-2n}$$

$$e) \frac{28a^2b^{-1}c^{-2}}{14a^3b^{-2}c} = 2 \cdot a^{-1} \cdot b \cdot c^{-3}$$

$$f) \frac{x^{4n+5}}{x^{6-5n}} = x^{4n+5-(6-5n)} = x^{9n-1}$$

Aufgabe 8:

$$a) \frac{a^2 b^{-5}}{c^{-3} d} \cdot \frac{c^{-3} d^2}{a^{-2} b^{-8}} = a^4 \cdot b^3 \cdot d$$

$$b) (4a^{3n-2} \cdot 3 \cdot a^{6-2n}) : 6a^{n+3} = \frac{12 \cdot a^{n+4}}{6a^{n+3}} = 2a$$

$$c) \left(\frac{3x^2 y^{-5}}{2a^{-3} b^{-1}} \cdot \frac{a^{-4} b^5}{x^{-3} y^{-2}} \right) : \frac{x^4 y^{-3}}{6ab^2} = \frac{3}{2} x^5 y^{-3} a^{-1} b^6 \cdot \frac{6ab^2}{x^4 y^{-3}} = 9 \cdot x \cdot b^8$$

$$d) \frac{(9-4a^2)^n}{(3-2a)^n} = \left(\frac{9-4a^2}{3-2a} \right)^n = \left(\frac{(3-2a)(3+2a)}{3-2a} \right)^n = (3+2a)^n$$

$$e) \frac{(a-1)^n}{(1-a)^n} = \left(\frac{a-1}{1-a} \right)^n = (-1)^n$$

$$f) \left(\frac{34ax^2}{23b^2 y^2} \right)^3 : \left(\frac{-68ax^4}{23b^3 y} \right)^3 = \left(\frac{34ax^2}{23b^2 y^2} \cdot \frac{23b^3 y}{-68ax^4} \right)^3 = \left(\frac{b}{-2x^2 y} \right)^3 = \frac{b^3}{-8x^6 y^3}$$

Aufgabe 9:

$$a) a^{x+4} - a^{x+2} = a^{x+2} \cdot (a^2 - 1) = a^{x+2} \cdot (a+1) \cdot (a-1)$$

$$b) x^{2m+1} - 18x^{2m-3} + 81x^{2m-7} = x^{2m-7} \cdot (x^8 - 18x^4 + 81) = x^{2m-7} \cdot (x^4 - 9)^2$$

$$c) 2x^{6m} - 72 = 2 \cdot (x^{6m} - 36) = 2 \cdot (x^{3m} + 6) \cdot (x^{3m} - 6)$$

Aufgabe 10:

$$a) (x^{n-1} + x^{1-n})^2 = (x^{n-1})^2 + 2x^{n-1} \cdot x^{1-n} + (x^{1-n})^2 = x^{2n-2} + 2 + x^{2-2n}$$

$$b) \frac{1}{3a^n} - \frac{1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^n} = \frac{a-3+3a}{3a^{n+1}} = \frac{4a-3}{3a^{n+1}}$$

$$c) \frac{2x+1}{x^{2n-2}} + \frac{1-x}{x^{2n-1}} - \frac{2x^4-1}{x^{2n+1}} = \frac{(2x+1) \cdot x^3 + (1-x) \cdot x^2 - (2x^4-1)}{x^{2n+1}} = \frac{x^2+1}{x^{2n+1}}$$

$$d) \frac{2a^3-2a^2+1}{a^{n+1}} - \frac{a^5}{a^{n+3}} - \frac{a-2}{a^{n-1}} = \frac{(2a^3-2a^2+1) \cdot a^2 - a^5 - (a-2) \cdot a^4}{a^{n+3}} = \frac{a^2}{a^{n+3}} = a^{-1-n}$$

$$e) \frac{x^{m-1} + 6x^{m-2} + 9x^{m-3}}{x^{m-2} + 6x^{m-3} + 9x^{m-4}} = \frac{x^{m-3}(x^2 + 6x + 9)}{x^{m-4}(x^2 + 6x + 9)} = x^{m-3-(m-4)} = x$$

$$f) \frac{a^{m-1} - 2a^m + a^{m+1}}{a^{m+1} - a^m} = \frac{a^{m-1}(1-2a+a^2)}{a^m(a-1)} = \frac{a^{m-1}(a-1)^2}{a^m(a-1)} = a^{-1}(a-1)$$

$$g) \frac{a^4 - a^5}{a^5 - a^4} = \frac{a^4(1-a)}{a^4(a-1)} = \frac{1-a}{a-1} = -1$$

$$h) \frac{-y^{k+2} + 2y^{k+1} - y^k}{y^{k+2} - y^k} = \frac{-y^k(y^2 - 2y + 1)}{y^k(y^2 - 1)} = \frac{-(y-1)^2}{(y-1)(y+1)} = \frac{-(y-1)}{y+1} = \frac{1-y}{y+1}$$

$$i) \frac{3a^2+1}{a^{3n+1}} - \frac{2a-1}{a^{3n}} - \frac{1}{a^{3n-1}} = \frac{3a^2+1-(2a-1) \cdot a - 1a^2}{a^{3n+1}} = \frac{a+1}{a^{3n+1}}$$

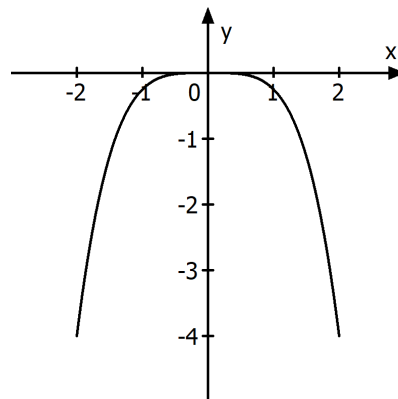
$$\begin{aligned}
 \text{j)} \quad & (x^{2n+1} - 3x^{1+n})^2 = x^{2(2n+1)} - 6x^{2n+1} \cdot x^{1+n} + 9x^{2(1+n)} = x^{4n+2} - 6x^{3n+2} + 9x^{2+2n} \\
 \text{k)} \quad & \frac{x^{n+2} - x^n}{x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2}} = \frac{x^n(x^2 - 1)}{x^{n-2}(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x^n(x-1)(x+1)}{x^{n-2}(x-1)^2} = \frac{x^{n-(n-2)}(x+1)}{x-1} = \frac{x^2(x+1)}{x-1} \\
 \text{l)} \quad & 16 \cdot 2^{n-2} + 20 \cdot 2^{n-1} + 18 \cdot 2^n = 2^{n-2}(16 + 20 \cdot 2 + 18 \cdot 2^2) = 2^{n-2} \cdot 128 = 2^{n-2} \cdot 2^7 = 2^{n+5} \\
 \text{m)} \quad & \frac{a^2}{(a+1)^3} - \frac{2a}{(a+1)^2} + \frac{1}{a+1} = \frac{a^2}{(a+1)^3} - \frac{2a(a+1)}{(a+1)^3} + \frac{(a+1)^2}{(a+1)^3} = \frac{a^2 - (2a^2 + 2a) + a^2 + 2a + 1}{(a+1)^3} \\
 & = \frac{1}{(a+1)^3} \\
 \text{n)} \quad & \left(\frac{x-2y}{y^2} + \frac{1}{x} \right) : \frac{x-y}{xy^2} = \left(\frac{(x-2y) \cdot x}{xy^2} + \frac{y^2}{xy^2} \right) \cdot \frac{xy^2}{x-y} = \frac{x^2 - 2yx + y^2}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2}{x-y} = x-y
 \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \sqrt{400} - 8 \cdot \sqrt[5]{32} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{216} - 6 \cdot \sqrt[4]{256} = 20 + 8 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 6 \cdot 4 = 15 \\
 \text{b)} \quad & 8 \cdot \sqrt[8]{a^4} - 5 \cdot \sqrt[6]{a^3} - 2 \cdot \sqrt[4]{a^2} = 8a^{0,5} - 5a^{0,5} - 2a^{0,5} = a^{0,5} = \sqrt{a} \\
 \text{c)} \quad & \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{2,75}{3}}} = \left(a^{\frac{23}{12}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{a^{23}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 12:

a) Schaubild von f:



$$\text{b)} \quad f(x) = -10 \Leftrightarrow -0,25x^4 = -10 \Leftrightarrow x^4 = 40 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{40}$$

c) Die Schaubilder schneiden sich in S(3|y).
Wegen $f(3) = -20,25$ lautet der Punkt S(3|-20,25).

Berechnung von a:

$$\text{Wegen } g(3) = -20,25 \text{ folgt } a \cdot 3^3 = -20,25 \Leftrightarrow a = -0,75$$

Aufgabe 13:

$$f(x) = a \cdot x^n \text{ mit } A(3|9) \text{ und } B(1|\frac{1}{3})$$

$$\text{Einsetzen von B: } \frac{1}{3} = a \cdot 1^n \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \quad (\text{da } 1^n = 1 \text{ gilt})$$

$$\text{Einsetzen von Q: } 9 = a \cdot 3^n \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{3} \cdot 3^n \Leftrightarrow 3^n = 27 \Leftrightarrow n = 3 \quad \text{somit: } f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$\text{Wegen } f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 = \frac{125}{3} \text{ gilt } b = \frac{125}{3}.$$

$$\textbf{Aufgabe 14: } f(x) = a \cdot x^r \text{ mit } P(2|\frac{8}{3}) \text{ und } Q(3|9).$$

$$\text{Einsetzen von P: } \frac{8}{3} = a \cdot 2^r \quad (*)$$

$$\text{Einsetzen von Q: } 9 = a \cdot 3^r \quad (**)$$

Division der Gleichungen: (*) geteilt durch (**):

$$\frac{\frac{8}{3}}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^r \Leftrightarrow \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^r \Leftrightarrow r = 3$$

$$\text{Einsetzen von } r = 3 \text{ in } (*): \frac{8}{3} = a \cdot 8 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\text{Die Funktionsgleichung lautet } f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

Aufgabe 15:

$$f(x) = a \cdot x^n \text{ mit } A(1|2) \text{ und } B(2|16)$$

$$\text{a) Einsetzen von A: } 2 = a \cdot 1^n \Leftrightarrow a = 2$$

$$\text{Einsetzen von B: } 16 = 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow 2^n = 8 \Leftrightarrow n = 3$$

$$f(x) = 2x^3$$

$$\text{b) Wenn } x \text{ um } 20\% \text{ zunimmt, ergibt sich der Term } 1,2 \cdot x$$

$$f(1,2x) = 2 \cdot (1,2x)^3 = 2 \cdot 1,728 \cdot x^3 = 1,728 \cdot 2x^3 = 1,728 \cdot f(x)$$

Der y-Wert steigt um 72,8%.

$$\text{c) Wenn } x \text{ um } 10\% \text{ abnimmt, ergibt sich der Term } 0,9 \cdot x$$

$$f(0,9x) = 2 \cdot (0,9x)^3 = 2 \cdot 0,729 \cdot x^3 = 0,729 \cdot 2x^3 = 0,729 \cdot f(x)$$

Der y-Wert sinkt um 27,1%.

Aufgabe 16:

Aus dem Schaubild können die Punkte B(2|1) und A(4|8) abgelesen werden.

$$\text{Einsetzen von A in die Funktionsgleichung: } 1 = a \cdot 2^n \quad (*)$$

$$\text{Einsetzen von B in die Funktionsgleichung: } 8 = a \cdot 4^n \quad (**)$$

Division der Gleichungen: (**) geteilt durch (*):

$$\frac{8}{1} = \left(\frac{4}{2}\right)^n \Leftrightarrow 8 = 2^n \Leftrightarrow n = 3$$

Einsetzen von $n = 3$ in (*):

$$1 = a \cdot 2^3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{8}x^3$

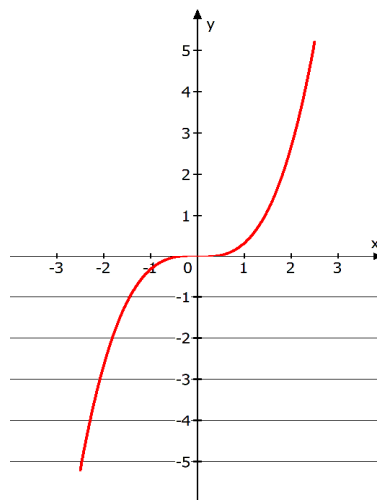
Schnittpunkt des Schaubildes mit der Gerade $y = -64$:

$$-64 = \frac{1}{8}x^3 \Leftrightarrow x^3 = -512 \Leftrightarrow x = -8$$

Der Schnittpunkt lautet $S(-8|-64)$.

Aufgabe 17:

a) Zeichnung des Schaubildes:



b) Schnitt des Schaubildes von f mit der Geraden $y = -\frac{8}{9}$:

$$\frac{1}{8}x^3 = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\frac{1}{8}x^3 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Die x -Werte der Kurvenpunkte liegen im Intervall $-2 \leq x \leq 2$.

c) Der Abstand eines Punktes von der x -Achse entspricht dem y -Wert des Punktes.

Zunächst werden die Punkte ermittelt, die von der x -Achse genau den Abstand $\frac{125}{24}$ besitzen:

$$\frac{1}{3}x^3 = \frac{125}{24} \Leftrightarrow x^3 = \frac{125}{8} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{3}x^3 = -\frac{125}{24} \Leftrightarrow x^3 = -\frac{125}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Mit Hilfe des Schaubildes in a) kann man daraus schließen:

Für $x \geq \frac{5}{2}$ oder $x \leq -\frac{5}{2}$ beträgt der Abstand mindestens $\frac{125}{24}$.

Aufgabe 18:

a) Einsetzen von A in die Funktionsgleichung: $-0,25 = c \cdot (-1)^n$ (*)

Einsetzen von B in die Funktionsgleichung: $2 = c \cdot 2^n$ (**)

Division der Gleichungen: (**) geteilt durch (*):

$$\frac{2}{-0,25} = \left(\frac{2}{-1}\right)^n \Leftrightarrow -8 = (-2)^n \Leftrightarrow n = 3$$

Einsetzen von $n = 3$ in (**):

$$2 = c \cdot 2^3 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3$$

b) $f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^3 = \frac{27}{4}$, also $C(3 | \frac{27}{4})$

c) Wenn x um 10% zunimmt, ergibt sich der Term $1,1 \cdot x$

$$f(1,1x) = \frac{1}{4} \cdot (1,1x)^3 = \frac{1}{4} \cdot 1,331 \cdot x^3 = 1,331 \cdot \frac{1}{4}x^3 = 1,331 \cdot f(x)$$

Der y-Wert steigt um 33,1%.

Aufgabe 19:

a) $x^4 = 625 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$

b) $343 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -343 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{343} = -7$

c) $x^3 - 23 = -13 \Leftrightarrow x^3 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{10}$

d) $10^3 \cdot x^5 = 10^{-2} \Leftrightarrow x^5 = 10^{-5} \Leftrightarrow x = 0,1$

e) $5x^3 - 20 = 7 - 3x^3 \Leftrightarrow 8x^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

f) $65 - 53x^2 = 16 + 47x^2 \Leftrightarrow -100x^2 = -49 \Leftrightarrow x^2 = 0,49 \Rightarrow x = \pm 0,7$

g) $1,2x^5 + 0,00243 = 0,2x^5 \Leftrightarrow x^5 = -0,00243 \Leftrightarrow x = -0,3$

Aufgabe 20:

a) $\sqrt{x} - 4 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \mid \text{quadrieren}$
 $\Rightarrow x = 1$

Einsetzen von $x = 1$ in die Ausgangsgleichung liefert eine wahre Aussage.
 $L = \{ 1 \}$

b) $\sqrt{4x - 5} - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x - 5} = 6 \mid \text{quadrieren}$
 $\Rightarrow 4x - 5 = 36 \Leftrightarrow x = 20,25$

Einsetzen von $x = 20,25$ in die Ausgangsgleichung liefert eine wahre Aussage.
 $L = \{ 20,25 \}$

c) $5 - \sqrt{x - 6} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x - 6} = 3 \mid \text{quadrieren}$
 $\Rightarrow x - 6 = 9 \Leftrightarrow x = 15$

Einsetzen von $x = 15$ in die Ausgangsgleichung liefert eine wahre Aussage.
 $L = \{ 15 \}$

d) $\sqrt{4 - x} = x + 2 \mid \text{quadrieren}$
 $\Rightarrow 4 - x = (x + 2)^2 \Leftrightarrow 4 - x = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0$

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 0}}{2} = \frac{-5 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -5$

Einsetzen von $x = 0$ in die Ausgangsgleichung liefert eine wahre Aussage.

Einsetzen von $x = -5$ in die Ausgangsgleichung liefert eine falsche Aussage: $\sqrt{-9} = -3$

$L = \{ 0 \}$

e) $\sqrt{3x + 1} - x + 3 = 0 \mid \text{Wurzel isolieren}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x + 1} = x - 3 \mid \text{quadrieren}$

$\Rightarrow 3x + 1 = (x - 3)^2$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = x^2 - 6x + 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0$

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \text{ und } x_2 = 1$

Einsetzen von $x = 8$ in die Ausgangsgleichung liefert eine wahre Aussage.

Einsetzen von $x = 1$ in die Ausgangsgleichung liefert eine falsche Aussage: $\sqrt{4} - 1 + 3 = 0$

$L = \{ 8 \}$

Aufgabe 21:

$$a) 0,000134 \cdot 10^{-111} = 1,34 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-111} = 1,34 \cdot 10^{-115}$$

$$b) 5678 \cdot 10^{-1001} = 5,678 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1001} = 5,678 \cdot 10^{-998}$$

Aufgabe 22:

$$a) 0,007 \text{ mm} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$b) 300.000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c) 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$d) 199,3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 = 1,993 \cdot 10^8 \text{ m}^3 = 1,993 \cdot 10^8 \cdot 10^3 \text{ Liter} = 1,993 \cdot 10^{11} \text{ Liter}$$

Aufgabe 23:

$$\text{Anzahl der Hühnereier: } 710 \cdot 10^9$$

$$\text{Anzahl der Packungen: } 710 \cdot 10^9 : 10 = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Packungen}$$

$$\text{Höhe aller Packungen} = 7,1 \cdot 10^{10} \cdot 6 \text{ cm} = (6 \cdot 7,1 \cdot 10^{10}) : 100.000 \text{ km} = 4.260.000 \text{ km}$$

Aufgabe 24:

Eine Person besitzt 4,8 Liter = 4800 ml Blut.

Daher besitzt eine Person $5 \cdot 10^6 \cdot 4800 = 2,4 \cdot 10^{10}$ rote Blutkörperchen.

$$\text{Strecke aller roten Blutkörperchen} = 2,4 \cdot 10^{10} \cdot 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 153.600 \text{ m} = 153,6 \text{ km}$$

Aufgabe 25:

$$a) \text{ Anzahl Moleküle} = \frac{100,0 \text{ g}}{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = \frac{0,1 \text{ kg}}{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 3 \cdot 10^{25} \text{ Moleküle}$$

$$b) \text{ Länge der Molekülkette} = 3 \cdot 10^{25} \cdot 1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Aufgabe 26:

$$\text{In einem Sprühstoß sind } \frac{5 \cdot 10^{-2}}{400} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ g Wirkstoff enthalten.}$$

$$3,4 \cdot 10^8 \text{ Wirkstoffpartikel haben eine Masse von } 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ g.}$$

$$\text{Somit hat ein Partikel eine Masse von } \frac{1,25 \cdot 10^{-4}}{3,4 \cdot 10^8} = 3,68 \cdot 10^{-13} \text{ g}$$

Aufgabe 27:

$$u = (10^{10})^{10} = 10^{100}, \text{ also eine 1 mit 100 Nullen.}$$

$$v = 10^{(10^{10})} \text{ also eine 1 mit } 10^{10} = 10 \text{ Milliarden Nullen}$$

$$\text{Druckdauer bei u: } \frac{101}{150} = 0,673 \text{ Sekunden}$$

$$\text{Drucker druckt } 150 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 4,7304 \cdot 10^9 \text{ Ziffern pro Jahr}$$

$$\text{Druckdauer bei v: } \frac{10.000.000.001}{4,7304 \cdot 10^9} = 2,114 \text{ Jahre}$$

Aufgabe 28:

Bei der Goldfolie handelt es sich um ein Prisma. Das Volumen des Prismas vor der Walzung beträgt $V_{\text{vorher}} = G \cdot h = 0,5\text{m}^2 \cdot 0,10\text{mm} = 0,5\text{m}^2 \cdot \frac{0,10}{1000}\text{m} = 5 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$

Die Höhe des Prismas (also der Goldfolie) nach der Walzung beträgt $3,2 \cdot 10^{-2}\text{mm}$.

Außerdem gilt $V_{\text{vorher}} = V_{\text{nachher}} = 5 \cdot 10^{-5}\text{m}^3$.

$$V = G \cdot h \Rightarrow G = \frac{V}{h} = \frac{5 \cdot 10^{-5}\text{m}^3}{3,2 \cdot 10^{-2}\text{mm}} = \frac{5 \cdot 10^{-5}\text{m}^3}{\frac{3,2 \cdot 10^{-2}}{1000}\text{m}} = \frac{25}{16}\text{m}^2$$

Aufgabe 29:

In 1 g Farbstoff sind $\frac{6 \cdot 10^{23}}{150} = 4 \cdot 10^{21}$ Farbmoleküle enthalten.

Im Bodensee sind $5 \cdot 10^{10}\text{m}^3 = 5 \cdot 10^{10} \cdot 10^3\text{dm}^3 = 5 \cdot 10^{13}$ Liter Wasser enthalten.

In einem Liter Wasser sind dann $\frac{4 \cdot 10^{21}}{5 \cdot 10^{13}} = 80.000.000$ Farbmoleküle enthalten.

Aufgabe 30:

$$\text{Anzahl der Erdkugeln} = \frac{V_{\text{Sonne}}}{V_{\text{Erde}}} = \frac{1,410 \cdot 10^{18}\text{km}^3}{1,083 \cdot 10^{21}\text{m}^3} = \frac{1,410 \cdot 10^{18} \cdot 10^9\text{m}^3}{1,083 \cdot 10^{21}\text{m}^3} = 1301939$$

Ca. 1,3 Millionen Erdkugeln ergeben das Volumen der Sonne.

Anzahl der Sekunden, die das Licht zur Sonne benötigt:

$$\frac{1,496 \cdot 10^8\text{km}}{2,998 \cdot 10^8\text{m/s}} = \frac{1,496 \cdot 10^8 \cdot 1000\text{m}}{2,998 \cdot 10^8\text{m/s}} \approx 500\text{s} = 8,3\text{min}$$

Das Licht benötigt zur sonne etwa 8,3 min.

Aufgabe 31:

In 1 g Zucker befinden sich $\frac{6,023 \cdot 10^{23}}{342} = 1,761 \cdot 10^{21}$ Moleküle.

In 11 g Zucker befinden sich $1,761 \cdot 10^{21} \cdot 11 = 1,937 \cdot 10^{22}$ Moleküle.

Volumen der Weltmeere = $1,3 \cdot 10^{18}\text{m}^3 = 1,3 \cdot 10^{18} \cdot 10^3\text{dm}^3 = 1,3 \cdot 10^{21}\text{dm}^3 = 1,3 \cdot 10^{21}$ Liter

$$\text{Anzahl Moleküle pro Liter Meerwasser} = \frac{1,937 \cdot 10^{22}}{1,3 \cdot 10^{21}} = 15$$

In jedem Liter Meerwasser sind durchschnittlich 15 Moleküle enthalten.