

Lösungen zur Körperrechnung

Gymnasium

Klasse 9 / 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2020

Aufgabe 1:

$$a) V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 72\pi = 226,2 \text{ cm}^3$$

b) Die Umformung des Kegels in einen Zylinder ändert nichts am Volumen.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r_{\text{Zyl}}^2 \cdot h_{\text{Zyl}}$$

$$226,2 = \pi \cdot r^2 \cdot 6 \Rightarrow r_{\text{Zyl}} \approx 3,46 \text{ cm}$$

$$c) \text{ Oberfläche des Kreiskegels: } O_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

Die Mantellinie s ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \text{ cm}$$

$$O_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{72} \approx 273 \text{ cm}^2$$

$$\text{Oberfläche des Zylinders: } O_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$O_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot \pi \cdot 3,46^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3,46 \cdot 6 = 206 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 2

$$a) V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^3$$

$$O_1 = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 24\pi \text{ cm}^2$$

b) Es handelt sich um einen Doppelkegel mit Mantellinie $s = b$.

Der Durchmesser des Grundkreises des Kegels ist $d = b \cdot \sqrt{2}$ (Diagonale des Quadrats)

Der Radius und die Höhe eines Kegels sind $r = h = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{2}$

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{1}{2} b \cdot \sqrt{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} b^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{6} \pi \cdot b^3 \cdot \sqrt{2}$$

$$O_2 = 2 \cdot M_{\text{Kegel}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{2} \cdot b = \pi \cdot b^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{Mit } b = 4 \text{ cm gilt: } V_2 = \frac{32}{3} \pi \cdot \sqrt{2} \text{ und } O_2 = 16\pi \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{32}{3} \pi \cdot \sqrt{2}}{16\pi} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \text{ und } \frac{O_2}{O_1} = \frac{16\pi \cdot \sqrt{2}}{24\pi} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \text{ was zu zeigen war}$$

$$c) V_1 = V_2 \Rightarrow 16\pi = \frac{1}{6} \pi \cdot b^3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow b^3 = \frac{96}{\sqrt{2}} \Rightarrow b \approx 4,08 \text{ cm}$$

Aufgabe 3:

- 1) Wasserhöhe, wenn zuerst der Kegel gefüllt wird:

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261,8 \text{ cm}^3$$

Für den Zylinder bleiben noch $0,9 \text{ Liter} - 261,8 \text{ cm}^3 = 900 \text{ cm}^3 - 261,8 \text{ cm}^3 = 638,2 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 638,2 = \pi \cdot 5^2 \cdot h_{\text{Wasser}} \Rightarrow h_{\text{Wasser}} = 8,13 \text{ cm.}$$

- 2) Wasserhöhe, wenn zuerst der Zylinder gefüllt wird:

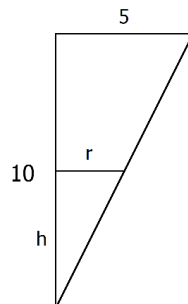
$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 785,4 \text{ cm}^3$$

Für den Kegel bleiben noch $900 \text{ cm}^3 - 785,4 \text{ cm}^3 = 114,6 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{Wasserkegel}}^2 \cdot h_{\text{Wasserkegel}}$$

In dieser Volumenformel gibt es nun die beiden Unbekannten r und h .

Deshalb wird eine zusätzliche Bedingung in Form des 2.Strahlensatzes benötigt:



$$\frac{5}{10} = \frac{r}{h} \Rightarrow h = 2r \text{ eingesetzt in die Volumenformel:}$$

$$114,6 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow 114,6 = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \Rightarrow r = 3,8 \text{ cm}$$

Damit gilt $h_{\text{Wasser}} = 2r = 7,6 \text{ cm.}$

Aufgabe 4:

a) Es gilt $U = 2\pi \cdot r \Rightarrow r_{\text{Kabel}} = \frac{U}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} = 0,8 \text{ mm}$ und $d_{\text{Glasfaser}} = r_{\text{Kabel}} = 0,8 \text{ mm}$

$$V = \pi \cdot (0,8 \text{ mm})^2 \cdot 180000 \text{ mm} - 2 \cdot \pi \cdot (0,4 \text{ mm})^2 \cdot 180000 \text{ mm} = 180956 \text{ mm}^3 \approx 181 \text{ cm}^3$$

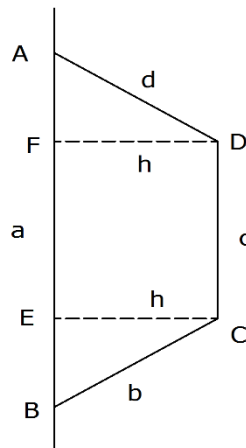
b) $V_{\text{Glas}} = 2 \cdot \pi \cdot (0,4 \text{ mm})^2 \cdot 180000 \text{ mm} = 180956 \text{ mm}^3$

Beim Umschmelzen zum Kegel mit $h = 2r$ bleibt das Volumen erhalten.

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow 180956 = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \Rightarrow r = 44,2 \text{ mm} \text{ und somit } h = 88,4 \text{ mm.}$$

Aufgabe 5:

a)



Zeichnet man die Höhe an den Punkten D und C ein, entsteht ein Rechteck und zwei kongruente (=deckungsgleiche) Dreiecke.

Bei Rotation des Rechtecks entsteht ein Zylinder, bei Rotation der beiden Dreiecke entsteht jeweils ein Kegel.

Es gilt:

$$r_{\text{Zylinder}} = r_{\text{Kegel}} = h = 8 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Zylinder}} = c = 12 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Kegel}} = \overline{AF} = \frac{a - c}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$s_{\text{Kegel}} = d = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 12 \approx 2412,7 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 6 \approx 402,1 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = 2412,7 + 2 \cdot 402,1 = 3216,9 \text{ cm}^3$$

- b) Die Oberfläche des Rotationskörpers setzt sich aus folgenden Flächen zusammen:

$$O_{\text{gesamt}} = 2 \cdot M_{\text{Kegel}} + M_{\text{Zylinder}}$$

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 8 \cdot 10 \approx 251,3 \text{ cm}^2$$

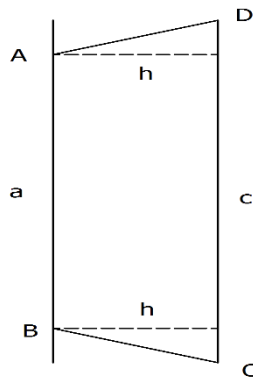
$$M_{\text{Zylinder}} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 8 \cdot 12 \approx 603,2 \text{ cm}^2$$

$$O_{\text{gesamt}} = 603,2 + 2 \cdot 251,3 = 1105,8 \text{ cm}^2$$

- c) Wenn $a = c = 24 \text{ cm}$ gilt, wird aus dem Trapez ein Rechteck.
Als Rotationskörper entsteht nur ein Zylinder mit Radius $r = 8 \text{ cm}$ und Höhe $h = 24 \text{ cm}$.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 24 \approx 4825,5 \text{ cm}^3$$

- d) Das gegebene Volumen von $1792\pi \approx 5630 \text{ cm}^3$ ist größer als das Volumen des Zylinders aus c). Daraus kann man folgern, dass die Seite c größer als 24 cm sein muss und damit größer als a sein muss.



Es handelt sich bei dem Rotationskörper um einen Zylinder der Höhe c , bei dem oben und unten jeweils ein Kegel herausgebohrt wurde.

$$r_{\text{Zylinder}} = r_{\text{Kegel}} = h = 8 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Zylinder}} = c$$

$$h_{\text{Kegel}} = \frac{c - a}{2} = \frac{c - 24}{2} = \frac{1}{2}c - 12$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = 1792 \cdot \pi$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = V_{\text{Zylinder}} - 2 \cdot V_{\text{Kegel}}$$

$$\Rightarrow 1792 \cdot \pi = \pi \cdot 8^2 \cdot c - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{2}c - 12\right)$$

$$\Rightarrow 1792\pi = 64\pi \cdot c - \frac{64}{3}\pi \cdot (c - 24) \quad \stackrel{:\pi}{\Rightarrow} 1792 = 64c - \frac{64}{3}(c - 24)$$

$$\Rightarrow 1792 = 64c - \frac{64}{3}c + 512 \quad \Rightarrow 1792 = \frac{128}{3}c + 512 \quad \Rightarrow 1280 = \frac{128}{3}c \quad \Rightarrow c = 30 \text{ cm}$$

Aufgabe 6:

a) Formel der Bogenlänge: $b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$

Einsetzen der bekannten Größen: $50,27 = \frac{\pi \cdot 21,54 \cdot \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \alpha = 133,7^\circ$

Formel für die Fläche des Kreisausschnittes: $A_{\text{Kreisausschnitt}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \pi \cdot 21,54^2 \cdot \frac{133,7^\circ}{360^\circ} = 541,34 \text{ cm}^2$$

b) Vom Kreisausschnitt können folgende Werte für den Kegel übernommen werden:

$$r_{\text{Kreisausschnitt}} = s_{\text{Kegel}} = 21,54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = M_{\text{Kegel}}$$

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_{\text{Kegel}} \cdot s_{\text{Kegel}} \Rightarrow 541,34 = \pi \cdot r_{\text{Kegel}} \cdot 21,54$$

$$r_{\text{Kegel}} = \frac{541,34}{\pi \cdot 21,54} = 8 \text{ cm}$$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt $h_{\text{Kegel}} = \sqrt{s_{\text{Kegel}}^2 - r_{\text{Kegel}}^2} = \sqrt{21,54^2 - 8^2} = 20 \text{ cm}$

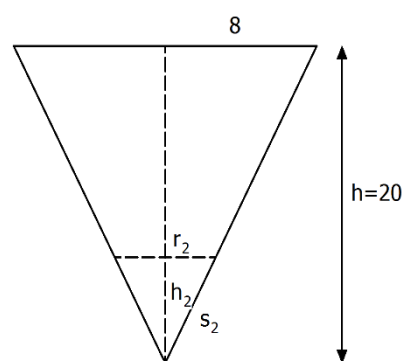
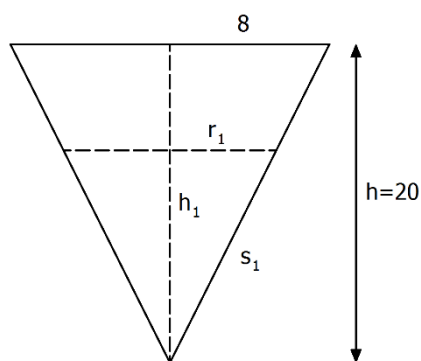
Damit ist gezeigt, dass die Höhe 20 cm beträgt.

$$V_{\text{Becher}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{Kegel}}^2 \cdot h_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1340 \text{ cm}^3$$

c) Beim Einfüllen von 1 Liter Flüssigkeit steht das Wasser bis zur Höhe h_1 .

Linke Abbildung: Der Abstand der 1-Liter-Markierung von der Spitze unten ist s_1 .

Rechte Abbildung: Der Abstand der 0,5-Liter-Markierung von der Spitze unten ist s_2 .



Berechnung von s_1 :

Gegeben ist das Wasservolumen $V_1 = 1 \text{ Liter} = 1000 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{Wasser}} = 1000 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 \quad (*)$$

Da in der Volumenformel (*) 2 Unbekannte enthalten sind, wird eine zweite Gleichung benötigt.

Mit dem 2.Strahlensatz folgt $\frac{8}{20} = \frac{r_1}{h_1} \Leftrightarrow r_1 = \frac{8}{20} \cdot h_1$ (**)

Einsetzen von (**) in (*): $1000 = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{8}{20} h_1 \right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow 1000 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4}{25} h_1^3 \Rightarrow h_1 \approx 18,1 \text{ cm}$

Daraus folgt $r_1 = \frac{8}{20} \cdot 18,1 = 7,24 \text{ cm}$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt $s_1 = \sqrt{h_1^2 + r_1^2} = \sqrt{18,1^2 + 7,24^2} = 19,5 \text{ cm}$

Berechnung von s_2 :

Gegeben ist das Wasservolumen $V_2 = 0,5 \text{ Liter} = 500 \text{ cm}^3$

$V_{\text{Wasser}} = 500 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2$ (*)

Da in der Volumenformel (*) 2 Unbekannte enthalten sind, wird eine zweite Gleichung benötigt.

Mit dem 2.Strahlensatz folgt $\frac{8}{20} = \frac{r_2}{h_2} \Leftrightarrow r_2 = \frac{8}{20} \cdot h_2$ (**)

Einsetzen von (**) in (*): $500 = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{8}{20} h_2 \right)^2 \cdot h_2 \Rightarrow 500 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4}{25} h_2^3 \Rightarrow h_2 \approx 14,4 \text{ cm}$

Daraus folgt $r_2 = \frac{8}{20} \cdot 14,4 = 5,76 \text{ cm}$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt $s_2 = \sqrt{h_2^2 + r_2^2} = \sqrt{14,4^2 + 5,76^2} = 15,5 \text{ cm}$

Der gesuchte Abstand der Markierungen beträgt $s_1 - s_2 = 4 \text{ cm}$

Aufgabe 7:

- a) Die längere Seite des Rechtecks (24 cm) wird nach dem Zusammenbiegen zum Umfang der Grundfläche des Zylinders.

Gesucht ist somit der Radius eines Kreises mit einem Umfang von 24cm.

$U_{\text{Grundkreis}} = 2 \cdot \pi \cdot r_Z \Rightarrow 24 = 2 \cdot \pi \cdot r_Z \Rightarrow r_Z = \frac{24}{2\pi} \approx 3,82 \text{ cm}$ was zu zeigen war.

$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r_Z^2 \cdot h = \pi \cdot 3,82^2 \cdot 12 = 550 \text{ cm}^3$

- b) Der Radius des unteren Halbkreises ist 12cm. wird beim Zusammenbiegen zur Mantellinie s des Kegels. Also gilt: $s_{\text{Kegel}} = 12 \text{ cm}$

Der Halbkreis besitzt die Bogenlänge $b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 180^\circ}{180^\circ} = 12\pi \text{ cm}$.

Dieser Kreisbogen wird nach dem Zusammenbiegen zum Umfang der Grundfläche des Kegels.

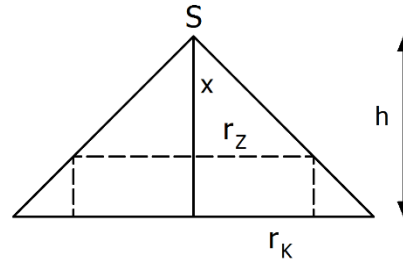
Also gilt: $U_{\text{Kegelgrundfläche}} = 2 \cdot \pi \cdot r_K \Rightarrow 12\pi = 2\pi \cdot r_K \Rightarrow r_K = 6 \text{ cm}$ was zu zeigen war.

Für die Volumenberechnung des Kegels wird noch die Kegelhöhe benötigt:

Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $h = \sqrt{s_{\text{Kegel}}^2 - r_K^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10,4 \text{ cm}$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_K^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10,4 = 392,1 \text{ cm}^3$$

c)



Bekannt sind die Strecken $h = 10,4 \text{ cm}$, $r_Z = 3,82 \text{ cm}$ und $r_K = 6 \text{ cm}$

Mit Hilfe des 2. Strahlensatzes kann die Strecke x berechnet werden:

$$\frac{r_K}{10,4} = \frac{r_Z}{x} \Rightarrow \frac{6}{10,4} = \frac{3,82}{x} \Rightarrow 6x = 10,4 \cdot 3,82 \Rightarrow x = 6,62 \text{ cm.}$$

Der Zylinder ragt in den Kegel mit einer Höhe von $10,4 - 6,62 = 3,78 \text{ cm}$ hinein.

Der sichtbare Zylinder, der aus dem Kegel herauschaut, besitzt eine Höhe von $12 \text{ cm} - 3,78 \text{ cm} = 8,22 \text{ cm}$.

Die Gesamthöhe des entstanden Körpers beträgt $8,22 \text{ cm} + 10,4 \text{ cm} = 18,62 \text{ cm}$.

Aufgabe 8:

a) $V_{\text{Quader}} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^3$ und $V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 2 = 1,57 \text{ m}^3$
 Gesamtvolumen = $3,57 \text{ m}^3 = 3570 \text{ dm}^3 = 3570 \text{ Liter}$

b) Volumen des Halbzylinders = $\frac{1,57}{2} = 0,785 \text{ m}^3 = 785 \text{ Liter}$
 Für den Quader bleiben noch $2000 - 785 = 1215 \text{ Liter} = 1,215 \text{ m}^3$ übrig.

$$1,215 = 1 \cdot 2 \cdot c \Rightarrow c = 0,6075 \text{ m}$$

Der Tank ist insgesamt bis zu einer Höhe von $0,5 \text{ m} + 0,6075 \text{ m} = 1,1075 \text{ m}$ gefüllt.

c) $3000 \text{ Liter} = 3 \text{ m}^3$

$$V_{\text{neuerTank}} = a \cdot 1 \cdot 2 + \pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot 2 = 3 \Rightarrow 2a + \frac{1}{2}\pi \cdot a^2 = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}\pi \cdot a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 18,85}}{3,14} = \frac{-2 \pm 4,78}{3,14} \text{ und daraus folgt } a = 0,885 \text{ m.}$$

Die zweite Lösung ist negativ und somit nicht brauchbar.

Aufgabe 9:

a) Volumen der Rakete = $V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 29,25 \cdot \pi \text{ cm}^3$

b) 25% des Gesamtvolumens sind $0,25 \cdot 29,25 \cdot \pi = \frac{117}{16} \pi$

Der „Pulverkörper“ besteht aus einem Kegel mit einem aufgesetzten Zylinder.

Der Kegel besitzt ein Volumen von $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 2,25 \pi \text{ cm}^3$.

Somit sind in dem Zylinder noch $\frac{117}{16} \pi - 2,25 \pi = 5,0625 \cdot \pi \text{ cm}^3$ enthalten.

$$V_{\text{Pulverzylinder}} = \pi \cdot 1,5^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{V_{\text{Pulverzylinder}}}{\pi \cdot 1,5^2} = \frac{5,0625 \cdot \pi}{\pi \cdot 1,5^2} = 2,25 \text{ cm.}$$

Das Pulver steht in der Rakete insgesamt $h_{\text{Kegel}} + 2,25 = 5,25 \text{ cm}$ hoch.

c) Der „Pulverkörper“ besteht nach der Drehung aus einem Zylinder mit einer herausgebohrten Halbkugel.

Das Volumen dieses Körpers ist $V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Halbkugel}}$

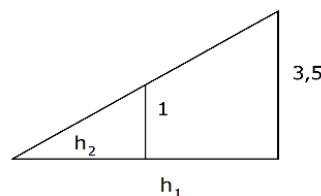
$$V = \pi \cdot 1,5^2 \cdot h - \frac{2}{3} \pi \cdot 1,5^3 \Leftrightarrow \frac{117}{16} \pi = 2,25 \pi \cdot h - 2,25 \pi \Rightarrow h = 4,25 \text{ cm.}$$

Aufgabe 10:

a) Das Holz stellt einen Hohlzylinder dar mit dem Außenradius 3,5mm und dem Innenradius 1 mm.

$$V_{\text{Holz}} = V_{\text{großerZylinder}} - V_{\text{Minn}} = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 170 - \pi \cdot 1^2 \cdot 170 = 6008,3 \text{ mm}^3 = 6 \text{ cm}^3$$

b) Die Höhe h_1 erhält man mit Hilfe des 2.Strahlensatzes.



$$\frac{3,5}{h_1} = \frac{1}{h_2} \Leftrightarrow h_1 = 3,5 \cdot h_2 = 17,5 \text{ mm} \quad \text{und} \quad s = \sqrt{h_1^2 + 3,5^2} = 17,85 \text{ mm}$$

c) $V_{\text{ungespitzterStift}} = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 170 = 6542,37 \text{ mm}^3$

$$V_{\text{gespitzterStift}} = 0,2 \cdot V_{\text{ungespitzterStift}} = 1308,47 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{gespitzterStift}} = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3,5^2 \cdot 17,5 + \pi \cdot 3,5^2 \cdot h_{\text{Zylinder}} = 1308,47$$

$$\Rightarrow 224,49 + 38,48 \cdot h_{\text{Zylinder}} = 1308,47 \Rightarrow h_{\text{Zylinder}} = 28,17 \text{ mm}$$

$$\text{Gesamte Stiftlänge} = 17,5 \text{ mm} + 28,17 \text{ mm} = 45,67 \text{ mm} = 4,57 \text{ cm}$$

Aufgabe 11:

- a) Der Zylinder und die Halbkugel haben einen Radius von $r = 1,5\text{cm}$.

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} \pi \cdot r_{\text{Kugel}}^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 1,5^3 \approx 7,07 \text{ cm}^3$$

Das restliche Volumen von $100 \text{ cm}^3 - 7,07 \text{ cm}^3 = 92,93 \text{ cm}^3$ steht nun für den Zylinder zur Verfügung.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r_z^2 \cdot h_z \Rightarrow 92,93 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot h_z \Rightarrow h_z = \frac{92,93}{\pi \cdot 1,5^2} \approx 13,15 \text{ cm.}$$

Abstand des Wasserspiegels von der Oberkante: $d = 17,5 \text{ cm} - 13,15 \text{ cm} = 4,35 \text{ cm}$

- b) Der Kegel hat einen Radius von $r = 5 \text{ cm}$ und eine Höhe von $h = 18 \text{ cm}$.

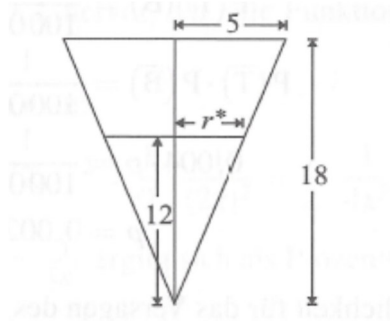
$$V_{\text{Kelchglas}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 471,24 \text{ cm}^3$$

Das Volumen des Wassers aus dem Reagenzglas beträgt 100 cm^3 .

Der prozentuale Anteil beträgt $\frac{100}{471,2} = 0,212 = 21,2\%$

- c) Die gesamte Flüssigkeit steht 12 cm hoch. Den Radius r^* des unteren Teilkegels kann man mit Hilfe des 2.Strahlensatzes berechnen:

$$\frac{12}{18} = \frac{r^*}{5} \Rightarrow r^* = \frac{10}{3} \text{ cm}$$



Nun kann das Volumen des Teilkegels berechnet werden:

$$V_{\text{Teilkegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot (r^*)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot 12 \approx 139,63 \text{ cm}^3$$

Damit beträgt das Volumen der Natronlauge: $V_{\text{Lauge}} = 139,63 \text{ cm}^3 - 100 \text{ cm}^3 = 39,63 \text{ cm}^3$

Aufgabe 12:

- a) Die bemalte Fläche besteht aus einem Kreisring mit Innenradius 5 cm und Außenradius 6 cm sowie aus einem 2 cm hohen Zylindermantel mit dem Zylinderaußenradius $r = 6$ cm.

$$A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot (r_{\text{außen}}^2 - r_{\text{innen}}^2) = \pi \cdot (6^2 - 5^2) \approx 34,6 \text{ cm}^2$$

$$M_{\text{Zylinder}} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 2 \approx 75,4 \text{ cm}^2$$

Die bemalte Fläche ist somit $34,6 \text{ cm}^2 + 75,4 \text{ cm}^2 = 110 \text{ cm}^2$

- b) Gegeben sind folgende Maße:

$$V_{\text{Wasser}} = 500 \text{ cm}^3, \quad s_{\text{Kegel}} = 9 \text{ cm}, \quad r_{\text{Kegel}} = 4,5 \text{ cm}, \quad r_{\text{Zylinder}} = 5 \text{ cm} \text{ (Innenradius)}$$

Zur Berechnung der Wasserhöhe benötigt man zunächst das Kegelvolumen.

$$\text{Die Kegelhöhe beträgt } h_{\text{Kegel}} = \sqrt{s_{\text{Kegel}}^2 - r_{\text{Kegel}}^2} = \sqrt{9^2 - 4,5^2} \approx 7,8 \text{ cm.}$$

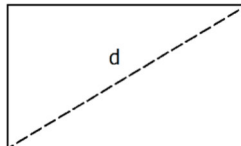
$$\text{Das Kegelvolumen beträgt } V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4,5^2 \cdot 7,8 \approx 165,4 \text{ cm}^3$$

Da der Kegel in den Zylinder gestellt wird, besteht der „Wasserkörper“ aus einem Zylinder mit heraus gebohrtem Kegel:

$$V_{\text{Wasser}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} \Rightarrow 500 \text{ cm}^3 = \pi \cdot 5^2 \cdot h_{\text{Wasser}} - 165,4 \Rightarrow h_{\text{Wasser}} = 8,47 \text{ cm.}$$

Da der Kegel nur 7,79 cm hoch ist, ist er vollständig mit Wasser bedeckt.

- c) Wenn man den Zylindermantel aufschneidet und als Rechteck ausbreitet, entspricht der Goldfaden der Diagonalen des Rechtecks.



Das Rechteck besitzt die Breite $h_{\text{Zylinder}} = 15 \text{ cm}$ und die Länge

$$U_{\text{Grundkreis}} = 2\pi \cdot r_{\text{Zylinder}} = 2\pi \cdot 6 = 37,7 \text{ cm.}$$

Die Rechteckdiagonale beträgt nach dem Satz des Pythagoras

$$d = \sqrt{15^2 + 37,7^2} = 40,6 \text{ cm.}$$

Der Goldfaden ist 40,6 cm lang.

Aufgabe 13:

- a) Das Quadrat hat eine Fläche von $A_Q = 25 \cdot 25 = 625 \text{ cm}^2$.

Der Kreisausschnitt besitzt die Fläche $A_K = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi \cdot 12,5^2 \cdot \frac{288^\circ}{360^\circ} \approx 392,7 \text{ cm}^2$

Die Abfallfläche beträgt $625 - 392,7 = 232,3 \text{ cm}^2$. Dies sind $\frac{232,3}{625} \approx 0,372 = 37,2\%$.

- b) Der Radius des Kreisausschnitts entspricht der Mantellinie des Kegels.
Die Fläche des Kreisausschnitts entspricht der Mantelfläche des Kegels.

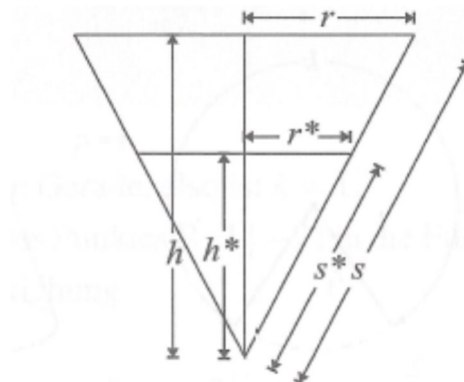
Von dem Kegel ist daher bekannt: Mantellinie $s = 12,5 \text{ cm}$ und Mantelfläche $392,7 \text{ cm}^2$

Es gilt $M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_{\text{Kegel}} \cdot s \Rightarrow 392,7 = \pi \cdot r_{\text{Kegel}} \cdot 12,5 \Rightarrow r_{\text{Kegel}} \approx 10 \text{ cm}$.

Höhe des Kegels (Satz des Pythagoras): $h = \sqrt{s^2 - r_{\text{Kegel}}^2} = \sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5 \text{ cm}$.

Volumen des Kegels: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 7,5 \approx 785,4 \text{ cm}^3$

- c) Die Flüssigkeit stellt einen neuen – kleineren Kegel – innerhalb des großen Kegels dar. Der kleinere Kegel habe die Mantellinie s^* und den Radius r^* . Der große, aus b) bekannte Kegel hat den Radius $r = 10 \text{ cm}$ und die Mantellinie $s = 12,5 \text{ cm}$.



Von dem kleineren Kegel ist bekannt: $M_{\text{kl.K}} = \frac{392,7}{2} = 196,35 \text{ cm}^2$

Aufgrund der bekannten Mantelfläche gilt: $196,35 = \pi \cdot r^* \cdot s^*$ (*)

Da die Gleichung (*) zwei Unbekannte enthält, benötigt man eine weitere Formel, um r^* und s^* zu berechnen.

Man verwendet den 2.Strahlensatz:

$$\frac{10}{r^*} = \frac{12,5}{s^*} \Leftrightarrow 10s^* = 12,5r^* \Leftrightarrow s^* = 1,25 \cdot r^* \quad (**)$$

Einsetzen von (**) in (*): $196,35 = \pi \cdot r^* \cdot (1,25 \cdot r^*) \Leftrightarrow (r^*)^2 = \frac{196,35}{1,25 \cdot \pi} \Rightarrow r^* \approx 7,07 \text{ cm}$

Daraus ergibt sich $s^* = 1,25 \cdot 7,07 \approx 8,84 \text{ cm}$.

Die Höhe des kleinen Kegels beträgt $h_{\text{kl.K}} = \sqrt{(s^*)^2 - (r^*)^2} = \sqrt{8,84^2 - 7,07^2} \approx 5,31 \text{ cm}$

Die Flüssigkeit steht etwa 5,3 cm hoch.

Aufgabe 14:

- a) Für das Gewicht des Körpers muss das Gesamtvolumen berechnet werden.

$$V_{\text{gesamt}} = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Halbkugel}}$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 65 = 3120 \cdot \pi \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 8 = 98 \cdot \pi \text{ mm}^3$$

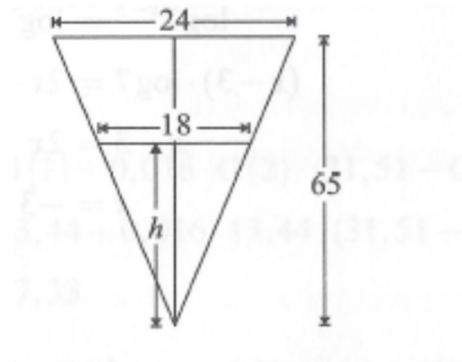
$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 12^3 = 1152 \cdot \pi \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{gesamt}} = 4370 \cdot \pi \text{ mm}^3 \approx 13728,8 \text{ mm}^3 \approx 13,73 \text{ cm}^3$$

$$\text{Gewicht} = 13,73 \cdot 7,9 \approx 108,5 \text{ g}$$

- b) Der Verschluss steckt nun in einem Flaschenhals.

Der Kreiskegel hat folgenden Querschnitt:



Mit Hilfe des 2.Strahlensatzes kann die Höhe h ermittelt werden, mit der der Verschluss in der Flasche steckt:

$$\frac{24}{18} = \frac{65}{h} \Leftrightarrow h = \frac{65 \cdot 9}{12} = 48,75 \text{ mm}$$

Der Verschluss steckt mit einer Höhe von 48,75 mm im Flaschenhals.

Fläche des Kegelmantels, der sich innerhalb der Flasche befindet:

$$\text{Es gilt } M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s$$

$$\text{Mantellinie } s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{48,75^2 + 9^2} = 49,57 \text{ mm}$$

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 9 \cdot 49,57 = 1401,56 \text{ mm}^2$$

Aufgabe 15:

- a) Die Querschnittsfläche Q besteht aus einem Sechseck und sechs Halbkreisen:

$$Q = A_{\text{Sechseck}} + 6 \cdot A_{\text{Halbkreis}}$$

Ein Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken: $A_{\text{gleichs.Dreieck}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

Das gleichseitige Dreieck hat die Seitenlänge $a = 2r = 2 \text{ dm}$.

$$A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \frac{2^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ dm}^2$$

$$6 \cdot A_{\text{Halbkreis}} = 3 \cdot A_{\text{Kreis}} = 3 \cdot \pi \cdot r^2 = 3\pi \text{ dm}^2$$

$$\text{Querschnittsfläche} = 6\sqrt{3} + 3\pi \approx 19,82 \text{ dm}^2$$

Die Säule ist ein Prisma mit $V = Q \cdot h = 19,82 \cdot 20 = 396,4 \text{ dm}^3$

$$\text{Masse} = 396,4 \text{ dm}^3 \cdot 2,55 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1010,82 \text{ kg}.$$

Die Säule wiegt mehr als 1 Tonne.

- b) Wenn der Sockel höchstens 100 kg wiegen darf, darf er ein maximales Volumen von

$$V = 100 : 2,55 \approx 39,216 \text{ dm}^3 \text{ besitzen.}$$

Mit Hilfe des gegebenen Volumens kann nun der Radius des Zylinders berechnet werden:

Mit $V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ folgt $39,216 = \pi \cdot r^2 \cdot 1,5 \Rightarrow r_{\text{Zyl}} = 2,89 \text{ dm} = \text{Radius des Marmorsockels}$
Der Durchmesser des Marmorsockels beträgt $d = 2r = 5,78 \text{ dm}$.

Die Säule „steht nicht über“, wenn der Durchmesser des Marmorsockels größer ist als die folgende Strecke s aus der Querschnittsfläche: $s = 2 \cdot h_{\text{Dreieck}} + 2 \cdot r_{\text{Halbkreis}}$

Für die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks gilt $h_{\text{Dreieck}} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$

$$\text{Daraus folgt } h_{\text{Dreieck}} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ dm}$$

$$\text{Daraus folgt } s = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \approx 5,46 \text{ dm}.$$

Da $d_{\text{Sockel}} > s$ ist, steht die Säule nicht über.

Aufgabe 16:

- a) Um das Gewicht des Brunnens zu berechnen, muss zunächst das Volumen ermittelt werden.

$$V_{\text{Brunnen}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_{\text{Zyl}}^2 \cdot h_{\text{Zyl}} - \frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{Kegel}}^2 \cdot h_{\text{Kegel}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Brunnen}} = \pi \cdot 50^2 \cdot 80 - \frac{1}{3} \pi \cdot 40^2 \cdot 30 = 184000 \cdot \pi \text{ cm}^3 \approx 578053 \text{ cm}^3 = 0,578 \text{ m}^3$$

$$\text{Das Gewicht des Brunnens beträgt } 0,578 \text{ m}^3 \cdot 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1618 \text{ kg}$$

- b) Folgende Flächen sind sichtbar: $O_{\text{sichtbar}} = M_{\text{Zylinder}} + A_{\text{Kreisring}} + M_{\text{Kegel}}$

$$M_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Zyl}} \cdot h_{\text{Zyl}} = 2\pi \cdot 50 \cdot 80 = 25132,74 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Kreisring}} = \pi \cdot (r_{\text{außen}}^2 - r_{\text{innen}}^2) = \pi \cdot (50^2 - 40^2) = \pi \cdot 900 = 2827,43 \text{ cm}^2$$

Zur Berechnung des Kegelmantels benötigt man die Mantellinie s des Kegels:

$$s_{\text{Kegel}} = \sqrt{h_{\text{Kegel}}^2 + r_{\text{Kegel}}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ cm}$$

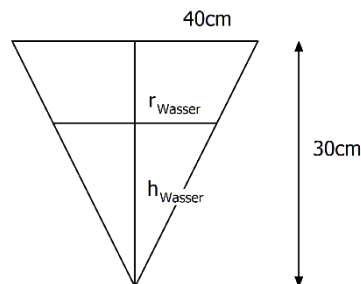
$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r_{\text{Kegel}} \cdot s_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 40 \cdot 50 = 6283,19 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow O_{\text{sichtbar}} = 25132,74 + 2827,43 + 6283,19 = 34243,36 \text{ cm}^2$$

Die zu polierende Fläche ist $34243,36 \text{ cm}^2$ groß.

- c) In den großen Kegel werden nun 30 Liter = 30.000 cm^3 Wasser eingefüllt. Bei dem "Wasserkörper" handelt es sich um einen kleineren Kegel, dessen Höhe nun gesucht wird.

Bekannt: $r_{\text{Kegel}} = 40 \text{ cm}$, $h_{\text{Kegel}} = 30 \text{ cm}$; $V_{\text{Wasserkegel}} = 30.000 \text{ cm}^3$



Anhand des bekannten Volumens gilt: $30.000 = \frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{Wasserkegel}}^2 \cdot h_{\text{Wasserkegel}}$ (*)

Da in der Gleichung (*) 2 Unbekannte enthalten sind, wird noch der 2. Strahlensatz benutzt:

$$\frac{r_{\text{Kegel}}}{h_{\text{Kegel}}} = \frac{r_{\text{Wasserkegel}}}{h_{\text{Wasserkegel}}} \Rightarrow \frac{40}{30} = \frac{r_{\text{Wasserkegel}}}{h_{\text{Wasserkegel}}} \Rightarrow r_{\text{Wasserkegel}} = \frac{4}{3} \cdot h_{\text{Wasserkegel}} \quad (**)$$

Nun wird die Beziehung (**) in (*) eingesetzt:

$$30.000 = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot h_{\text{Wasserkegel}} \right)^2 \cdot h_{\text{Wasserkegel}} \Rightarrow 30000 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{16}{9} \cdot h_{\text{Wasserkegel}}^3$$

$$\Rightarrow h_{\text{Wasserkegel}} = \sqrt[3]{16114,44} = 25,26 \text{ cm}$$

Das Wasser steht im Brunnen 25,26 cm hoch.

Aufgabe 17:Mantelfläche des Kegels: $M = \pi \cdot r \cdot s$ Fläche des Grundkreises: $A = \pi \cdot r^2$

$$\text{Es gilt: } M = 4 \cdot A \Rightarrow \pi \cdot r \cdot s = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{4} s \Rightarrow s_{\text{Kegel}} = 4 \cdot r_{\text{Kegel}}$$

Damit gilt für die Mantelfläche: $M = \pi \cdot r \cdot 4r = 4\pi \cdot r^2_{\text{Kegel}}$

Die Mantelfläche entspricht der Fläche des Kreisausschnittes, die den abgerollten Mantel darstellt. Außerdem gilt $s_{\text{Kegel}} = r_{\text{Kreisausschnitt}}$.

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \pi \cdot r^2_{\text{Kreisausschnitt}} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow 4\pi \cdot r^2_{\text{Kegel}} = \pi \cdot (4r_{\text{Kegel}})^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Aufgabe 18:

$$V_{\text{alt}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{neu}} = \pi \cdot (1,1 \cdot r)^2 \cdot h = 1,21 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 1,21 \cdot V_{\text{alt}}$$

Das Volumen steigt um 21% an.

$$M_{\text{alt}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$M_{\text{neu}} = 2 \cdot \pi \cdot (1,1 \cdot r) \cdot h = 1,1 \cdot M_{\text{alt}}$$

Die Mantelfläche steigt um 10% an.

Aufgabe 19:

$$\text{a) } V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 9,4^2 \cdot 12 = 3331,1 \text{ cm}^3$$

90% des Volumens entspricht $0,9 \cdot 3331,1 = 2998 \text{ cm}^3$ Kaffee.

$$\text{a) Der Dosierlöffel hat ein Volumen von } \frac{2998}{106} = 28,3 \text{ cm}^3.$$

Gesucht ist nun der Radius einer Halbkugel mit dem Volumen $28,3 \text{ cm}^3$.

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \Rightarrow 28,3 = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \Rightarrow r = 2,38 \text{ cm}$$

Aufgabe 20:

$$\text{a) } V_{\text{innen}} = V_{\text{Halbkugel}} + V_{\text{Zylinder}} = \frac{2}{3} \pi \cdot 1,2^3 + \pi \cdot 1,2^2 \cdot 14 = 67 \text{ cm}^3 = 67 \text{ ml}$$

b) Wenn in dem Reagenzglas 40 ml enthalten sind, fehlen im oberen Teil noch 27 ml. Dieser fehlende Teil entspricht dem Volumen eines Zylinders mit unbekannter Höhe h.

$$27 = \pi \cdot 1,2^2 \cdot h \Leftrightarrow h = 6 \text{ cm}$$

Die Markierungslinie muss 6 cm unterhalb des oberen Randes angebracht werden.

c) Für die Berechnung des Außenvolumens des Körpers ist die Dicke des Glases zu beachten.

$$V_{\text{außen}} = V_{\text{Halbkugel}} + V_{\text{Zylinder}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 1,4^3 + \pi \cdot 1,4^2 \cdot 14 = 91,95 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Nun gilt: } V_{\text{Glas}} = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} = 91,95 - 67 = 24,95 \text{ cm}^3.$$

Die Masse beträgt $m = 2,32 \cdot 24,95 = 57,9 \text{ Gramm}$.

Aufgabe 21:

$$\text{Kugelvolumen } V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1,8^3 = 24,4 \text{ cm}^3$$

Wenn die Kugel untertaucht, verdrängt sie folglich Wasser mit einem Volumen von $24,4 \text{ cm}^3$. Der angestiegene Wasserspiegel entspricht einem Zylinder mit Radius $r = 4,5 \text{ cm}$. Gesucht ist die Höhe dieses Zylinders.

$$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 24,4 = \pi \cdot 4,5^2 \cdot h \Rightarrow h = 0,38 \text{ cm.}$$

Der Wasserspiegel steigt um $0,38 \text{ cm}$ an.

Aufgabe 22:

- a) Der Container ist ein Prisma und besitzt die Volumenformel $V = G \cdot h$.

Die Grundfläche ist die Vorderfläche des Containers.

Die Vorderfläche besteht (bei senkrechter Flächenteilung) aus einem Trapez, einem Rechteck und einem Dreieck.

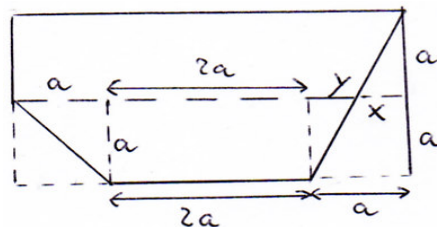
$$A_{\text{Trapez}} = \frac{2a + a}{2} \cdot a = \frac{3a^2}{2} = 3,375 \text{ m}^2 \quad A_{\text{Rechteck}} = 2a \cdot 2a = 4a^2 = 9 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2 = 2,25 \text{ m}^2$$

$$\text{Vorderfläche} = 3,375 \text{ m}^2 + 9 \text{ m}^2 + 2,25 \text{ m}^2 = 14,625 \text{ m}^2$$

$$\text{Höhe des Prismas} = \frac{3}{2}a = 2,25 \text{ m und somit } V = 14,625 \text{ m}^2 \cdot 2,25 \text{ m} = 32,91 \text{ m}^3$$

- b) Der bis zur halben Höhe gefüllte Container stellt ein Prisma dar. Die Grundfläche ist hierbei wieder die Vorderfläche und diese stellt ein Trapez dar.



Die Strecke x kann mit Hilfe des 2. Strahlensatzes berechnet werden:

$$\frac{a}{2a} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = 0,5a$$

Damit ist $y = a - x = a - 0,5a = 0,5a$.

Die gegenüberliegenden parallelen Seiten des Trapezes sind $2a$ und bzw. $a + 2a + y = 3,5a$ lang.

$$G = A_{\text{Trapez}} = \frac{2a + 3,5a}{2} \cdot a = 2,75a^2 = 6,1875 \text{ m}^2$$

und somit $V = 6,1875 \text{ m}^2 \cdot 2,25 \text{ m} = 13,92 \text{ m}^3$ und dies sind $\frac{13,92}{32,91} = 42,3\%$ des

Volumens.

c) Zunächst wird der Kegel mit Sand gefüllt.

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 7,0686 \text{ m}^3$$

Also bleiben für den Zylinder noch $10 - 7,0686 = 2,9314 \text{ m}^3$ übrig.

$$\text{Ansatz: } V_{\text{Zyl.}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 2,9314 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot h \Rightarrow h = 0,4147 \text{ m}$$

Also ist das Silo mit einer Höhe von $3 + 0,4147 = 3,4147 \text{ m}$ gefüllt.

Aufgabe 23:

a) Es gilt $V_{\text{Gewächshaus}} = V_{\text{Sechsecksäule}} + V_{\text{Pyramide}} = G \cdot h + \frac{1}{3} \cdot G \cdot (H - h)$

Zur Berechnung des Volumens wird der Inhalt der Grundfläche G (Sechseck) benötigt.

Ein Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit Kantenlänge a.

Die Länge d in der Zeichnung besteht aus zwei Dreiecksseiten der Länge a.

$$\text{Es gilt } d = 2a = 1,90 \text{ m} \Rightarrow a = 0,95 \text{ m}$$

$$\text{Fläche eines gleichseitigen Dreiecks: } A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \quad (\text{Formelsammlung})$$

$$G = A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \frac{0,95^2}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 2,34 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{Gewächshaus}} = V_{\text{Sechsecksäule}} + V_{\text{Pyramide}} = G \cdot h + \frac{1}{3} \cdot G \cdot (H - h) \approx 2,34 \cdot 1,8 + \frac{1}{3} \cdot 2,34 \cdot 0,8 = 4,836 \text{ m}^3$$

b) Es gilt $\overline{B'C'} = a = 0,95 \text{ m}$.

Die Pyramidenhöhe beträgt $H - h = 0,8 \text{ m}$ und die Höhe des gleichseitigen

$$\text{Grundflächendreiecks ist } \overline{A'M'} = \frac{a}{2} \sqrt{3} = 0,823 \text{ m} \quad (\text{Formelsammlung})$$

Mit dem Satz des Pythagoras kann nun die Strecke $\overline{A'S}$ ermittelt werden:

$$\overline{A'S} = \sqrt{\overline{M'S}^2 + \overline{A'M'}^2} \approx \sqrt{0,8^2 + 0,823^2} = 1,15 \text{ m was zu zeigen war.}$$

$$\text{Fläche des Dreiecks } B'C'S: A_{B'C'S} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{A'S} = \frac{1}{2} \cdot 0,95 \cdot 1,15 = 0,546 \text{ m}^2$$

Die Glasfläche des Gewächshauses besteht aus der Mantelfläche der Pyramide (6 Seitenflächendreiecke) und der Mantelfläche der Sechsecksäule (6 Rechtecke):

$$M_{\text{Sechsecksäule}} + M_{\text{Pyramide}} = 6 \cdot 0,95 \cdot 1,8 + 6 \cdot A_{B'C'S} = 13,536 \text{ m}^2$$

$$\text{Glasfläche} = 80\% \text{ der Fläche} = 0,8 \cdot 13,536 = 10,8 \text{ m}^2$$

Aufgabe 24:

a) Die Länge $\overline{SM}$ setzt sich zusammen aus der Höhe der Pyramide, der Länge b des Quaders und der Höhe des Grundflächendreiecks des Prismas.

Berechnung der Pyramidenhöhe:

Von der Pyramide sind gegeben: $a = 5,1 \text{ cm}$ und $s = 7,2 \text{ cm}$.

Mit Hilfe des Diagonalschnittes der Pyramide kann die Höhe h berechnet werden.

Die halbe Diagonale des Grundflächenquadrates der Pyramide beträgt

$$\frac{d}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{5,1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 3,61 \text{ cm}$$

$$\text{Höhe der Pyramide: } h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{7,2^2 - 3,61^2} \approx 6,23 \text{ cm.}$$

Berechnung der Höhe des Grundflächendreiecks des Prismas:

Das Grundflächendreieck ist gleichschenkelig mit der Grundseite $a = 5,1 \text{ cm}$ und zwei Schenkeln der Länge $c = 3,3 \text{ cm}$.

$$h_{\text{Dreieck}} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{3,3^2 - 2,55^2} \approx 2,1 \text{ cm.}$$

$$\text{Länge } \overline{SM} = 6,23 + b + 2,1 = 6,23 + 8,3 + 2,1 = 16,63 \text{ cm.}$$

b) Für die Masse des Hammerkopfes muss sein Volumen ermittelt werden:

$$V_{\text{Hammerkopf}} = V_{\text{Pyramide}} + V_{\text{Quader}} - V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Prisma}}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot 5,1^2 \cdot 6,23 \approx 54 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Quader}} = a \cdot b \cdot a = 5,1 \cdot 8,3 \cdot 5,1 \approx 215,9 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot a = \pi \cdot 1,25^2 \cdot 5,1 \approx 25 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\text{Dreieck}} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 2,1 \cdot 5,1 \approx 27,3 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Hammerkopf}} = 54 + 215,9 - 25 + 27,3 = 272,2 \text{ cm}^3$$

$$\text{Masse des Hammerkopfes} = 272,2 \cdot 7,8 = 2123,16 \text{ g} \approx 2,12 \text{ kg}$$

Aufgabe 25:

a) Volumen des Beckens: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4,95^2 \cdot 1,8 = 138,56 \text{ m}^3 = 138.560 \text{ Liter}$
Die Entleerung dauert $138560 : 400 = 346,4 \text{ Minuten}$.

b) Fläche des punktierten Teils = $A_{\text{Dreiviertel-Kreis}} + A_{\text{rechth.Dreieck}}$

$$A_{\text{Dreiviertel-Kreis}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 4,95^2 = 57,73 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{rechth.Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4,95 \cdot 4,95 = 12,25 \text{ m}^2$$

$$G = 57,73 + 12,25 \approx 70 \text{ m}^2$$

$$\text{Breite } b \text{ mit dem Satz des Pythagoras: } b = \sqrt{4,95^2 + 4,95^2} = 7 \text{ m}$$

Zur Berechnung der Länge l wird die Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks benötigt. Da das Dreieck gleichschenkelig ist, teilt die Höhe h des Dreiecks die Seite b in der Mitte.

$$\text{Mit dem Satz des Pythagoras folgt: } h = \sqrt{4,95^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2} = \sqrt{4,95^2 - 3,5^2} = 3,5 \text{ m}$$

$$\text{Länge } l = 4,95 + 3,5 + 7,2 = 15,65 \text{ m}$$

- c) Der linke Teil des Beckens ist eine Säule und kann somit als Prisma interpretiert werden (auch wenn die Grundfläche nicht eckig ist). Es gilt

$$V_{\text{links}} = G \cdot h_{\text{Säule}} = 70 \cdot 1,8 = 126 \text{ m}^3$$

Beim rechten Teil des Beckens handelt es sich ebenfalls um ein Prisma, allerdings ist die Grundfläche nicht der Boden des Beckens, sondern die Vorderfläche. Es handelt sich somit um ein „liegendes Prisma“ und die Grundfläche des Prismas ist

das Dreieck, das im Querschnitt zu sehen ist mit $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 7,2 = 6,48 \text{ m}^2$.

Die Höhe des Prismas entspricht der Länge $b = 7 \text{ m}$.

$$\text{Also } V_{\text{rechts}} = V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Dreieck}} \cdot b = 6,48 \cdot 7 = 45,36 \text{ m}^3.$$

$$\text{Gesamt volumen des Beckens} = 126 + 45,36 = 171,36 \text{ m}^3 = 171.360 \text{ Liter.}$$

Aufgabe 26:

- a) Es handelt sich um ein liegendes Prisma.

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h = A_{\text{Dreieck}} \cdot l$$

Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{36}{4} \cdot \sqrt{3} = 15,59 \text{ cm}^2$$

Die Höhe des Prismas entspricht der Länge $l = 4a = 24 \text{ cm}$.

$$\text{Also } V = 15,59 \cdot 24 = 374 \text{ cm}^3$$

Die Oberfläche des Prismas setzt sich zusammen aus der Fläche von zwei gleichseitigen Dreiecken und drei Rechtecken.

$$A_{\text{Dreieck}} = 15,59 \text{ cm}^2 \text{ (siehe oben)}$$

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot l = 6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$$

$$O_{\text{Prisma}} = 2 \cdot 15,59 + 3 \cdot 144 = 463 \text{ cm}^2.$$

- b) Zu dem berechneten Prismavolumen aus a) kommt noch das Volumen eines Kegels hinzu. Der Kegel besitzt den Radius $r = \frac{a}{2} = 3 \text{ cm}$. Die Höhe des Kegels entspricht

der Höhe des gleichseitigen Dreiecks. Aus Formelsammlung: $h_{\text{Dreieck}} = \frac{a}{2} \sqrt{3} = 5,2 \text{ cm}$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 5,2 = 49 \text{ cm}^3.$$

$$V_{\text{gesamt}} = 374 + 49 = 423 \text{ cm}^3$$

$$\text{Prozentuale Zunahme: } \frac{V_{\text{gesamt}}}{V_{\text{Prisma}}} = \frac{423}{374} = 1,131 \quad \text{also Zunahme um } 13,1\%.$$

- c) Nachweis der prozentualen Zunahme unabhängig von a:

$$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Dreieck}} \cdot h_{\text{Prisma}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 4a = a^3 \cdot \sqrt{3}$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{24} a^3 \cdot \sqrt{3}$$

$$V_{\text{gesamt}} = a^3 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{24} \pi \cdot a^3 \cdot \sqrt{3} = a^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{24} \pi\right)$$

$$\frac{V_{\text{gesamt}}}{V_{\text{Prisma}}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{24}\pi\right)}{a^3 \cdot \sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{24}\pi \approx 1,131 \text{ der Quotient ist unabhängig von } a.$$

Aufgabe 27:

- a) Der Radius des Zylinders beträgt $r = 6 \text{ cm}$ und die Höhe beträgt $h = 60 \text{ cm}$.

Volumen des Packsacks: $V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 60 \approx 6785,84 \text{ cm}^3$

Das zusammengelegte Zelt benötigt $5 \text{ dm}^3 = 5000 \text{ cm}^3$.

Es bleiben $6785,84 \text{ cm}^3 - 5000 \text{ cm}^3 = 1785,84 \text{ cm}^3$ leer.

Prozentualer Anteil, der leer bleibt: $\frac{1785,84}{6785,84} \approx 0,2632 = 26,32\%$

Es bleiben 26,32% des Packsacks leer.

- b) Länge aller Zeltstangen = $4 \cdot a + \overline{SH} + 2 \cdot b$

Es gilt $\overline{SH} = \frac{1}{2}a = 1,1 \text{ m}$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt $b = \sqrt{a^2 - \overline{SH}^2} = \sqrt{2,2^2 - 1,1^2} \approx 1,91 \text{ m}$

Gesamtlänge aller Zeltstangen = $4 \cdot 2,2 + 1,1 + 2 \cdot 1,91 = 13,72 \text{ m}$

- c) Die Außenfläche des Zeltes besteht aus drei Seitenflächen der quadratischen Pyramide, dem Boden und drei Dreiecksflächen des Vorzeltes.

Außenfläche des Zeltes = $3 \cdot A_{\text{gleichs.Dreieck}} + 2 \cdot A_{\text{rechth.Dreieck}} + A_{\text{Boden}} + A_{\text{Zelteingang}}$

Seitenfläche der Pyramide: $A_{\text{gleichs.Dreieck}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{2,2^2}{4} \sqrt{3} \approx 2,1 \text{ m}^2$

Vorzelt: $A_{\text{rechth.Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \overline{SH} = \frac{1}{2} \cdot 1,91 \cdot 1,1 \approx 1,05 \text{ m}^2$

$$A_{\text{Zelteingang}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{MH} \text{ mit } \overline{MH} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{1,905^2 - 1,1^2} \approx 1,56 \text{ m}$$

$$A_{\text{Zelteingang}} = \frac{1}{2} \cdot 2,2 \cdot 1,56 \approx 1,72 \text{ m}^2$$

Boden: $A_{\text{Boden}} = a^2 = 4,84 \text{ m}^2$

Die Außenfläche hat einen Flächeninhalt von $3 \cdot 2,1 + 2 \cdot 1,05 + 4,84 + 1,72 = 14,96 \text{ m}^2$

- d) Zeltvolumen = $V_{\text{Pyramide}} + V_{\text{Vorzelt}}$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 2,2^2 \cdot \overline{MH} = \frac{1}{3} \cdot 2,2^2 \cdot 1,56 \approx 2,52 \text{ m}^3$$

Das Vorzelt ist eine Dreieck-Pyramide mit Grundfläche = Zelteingang und Spitze S.

Die Höhe der Pyramide entspricht daher der Strecke $\overline{SH}$

$$V_{\text{Vorzelt}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Zelteingang}} \cdot \overline{SH} = \frac{1}{3} \cdot 1,72 \cdot 1,1 \approx 0,63 \text{ m}^3$$

Das Gesamtvolumen des Zeltes beträgt $2,52 \text{ m}^3 + 0,63 \text{ m}^3 = 3,15 \text{ m}^3$

Aufgabe 28:

a) Mantelfläche = $4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$ und Volumen = $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Berechnung von h_1 : $s^2 = h_1^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \Rightarrow h_1 = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 9,8 \text{ cm}$

Mantelfläche = $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9,8 = 78,4 \text{ cm}^2$

Berechnung von h : $h_1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{9,8^2 - 2^2} = \sqrt{92} = 9,6 \text{ cm}$

Volumen = $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 9,6 = 51,2 \text{ cm}^3$

b) Volumen der kleinen Pyramide: $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{9,6}{2} = 6,4 \text{ cm}^3$.

Volumen des Stumpfes: $V = 51,2 - 6,4 = 44,8 \text{ cm}^3$

Prozentualer Anteil des Stumpfes = $\frac{44,8}{51,2} = 0,875 = 87,5\%$

Aufgabe 29:

- a) Der gesamte Körper kann als Prisma betrachtet werden. Die Grundfläche (der Boden) des Prismas entspricht der Vorderseite, der "Deckel" der Rückseite des Prismas. Die Höhe des Prismas ist der Abstand zwischen Grundfläche und Deckel, also hier $h = 20 \text{ m}$.

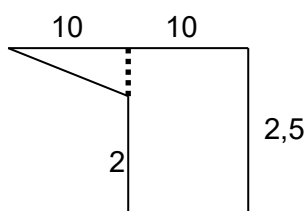
Berechnung der Grundfläche G :

$$G = A_{\text{Rechteck1}} + A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Rechteck2}} = 20 \cdot 1 + \frac{1}{2}(1+2) \cdot 20 + 10 \cdot 4 = 90 \text{ m}^2$$

Volumen des Prismas: $V = G \cdot h = 90 \cdot 20 = 1800 \text{ m}^3 = 1.800.000 \text{ dm}^3 = 1.800.000 \text{ Liter}$

Zeit zur Befüllung: $\frac{1800000}{50} = 36000 \text{ s} = 10 \text{ Stunden}$.

- b) Wenn das Wasser im Becken 2,5 m hoch steht, ergibt sich als "Wasserkörper" wieder ein Prisma mit folgender Grundfläche (von vorne betrachtet).



Die Vorderfläche besteht aus einem Rechteck und einem rechtwinkligen Dreieck.

$$\text{Gesamtfläche} = 10 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10 = 27,5 \text{ m}^2$$

$$\text{Daraus ergibt sich das Volumen } V = 52,5 \cdot 20 = 550 \text{ m}^3 = 550.000 \text{ Liter}$$

$$\text{Zeit zur Befüllung: } \frac{550000}{50} = 11000 \text{ s} = 3,06 \text{ Stunden}$$

Aufgabe 30:

a) Für die Höhe h der Pyramide gilt: $h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2$

Die Länge von d (Diagonale der quadratischen Grundfläche der Pyramide) lässt sich berechnen durch $d = a \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2} = 11,31 \text{ m}$ (Formelsammlung oder Herleitung über Pythagoras).

$$\text{Damit gilt: } h = \sqrt{12^2 - \left(\frac{11,31}{2}\right)^2} = 10,6 \text{ m.}$$

b) $V_{\text{gesamt}} = V_{\text{Quader}} + V_{\text{Pyramide}} = a \cdot a \cdot h_q + \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 8 \cdot 8 \cdot 7 + \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 10,6$
 $= 448 + 226,1 = 674,1 \text{ m}^3$

$$\text{Berechnung der Seitenflächenhöhe der Pyramide: } h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 4^2} = 11,31 \text{ m}$$

$$O_{\text{gesamt}} = 8 \cdot 8 + 8 \cdot 7 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = 64 + 224 + 2 \cdot 8 \cdot 11,31 = 468,96 \text{ m}^2$$

b) Masse des Holzquaders:

$$m_{\text{Quader}} = \rho_{\text{Holz}} \cdot V_{\text{Quader}} = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 448 \text{ m}^3 = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 448.000.000 \text{ cm}^3 = 224 \text{ Tonnen}$$

Masse der Pyramide:

$$m_{\text{Pyramide}} = \rho_{\text{Eisen}} \cdot V_{\text{Pyramide}} = 7,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 226,1 \text{ m}^3 = 7,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 226.100.000 \text{ cm}^3 = 1718 \text{ Tonnen}$$

$$\text{Masse des Körpers} = 224 + 1718 = 1942 \text{ Tonnen}$$

Aufgabe 31:

a) Prismavolumen: $V = G \cdot h$ mit $G = A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot A_{\text{gleichs.Dreieck}} = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 41,6 \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow 648 = 41,6 \cdot h \Rightarrow h = 15,6 \text{ cm}$$

$$\text{Mantelfläche } M = 6 \cdot A_{\text{Rechteck}} = 6 \cdot a \cdot h = 374,4 \text{ cm}^2$$

b) Würfelvolumen $V = a^3 \Rightarrow 648 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{648} = 8,7 \text{ cm}$ Kantenlänge

Aufgabe 32:

a) Volumen des Körpers = $V_{\text{Prisma}} - V_{\text{Zylinder}}$

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h = A_{\text{Sechseck}} \cdot 1,5 = 6 \cdot \frac{2^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 1,5 = 15,6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot 0,6^2 \cdot 1,5 = 1,7 \text{ cm}^3$$

$$\text{Gesamtvolumen} = 15,6 - 1,7 = 13,9 \text{ cm}^3$$

$$\text{Oberfläche des Körpers} = 6 \cdot A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot (A_{\text{Sechseck}} - A_{\text{Kreis}}) + M_{\text{Zylinder}}$$

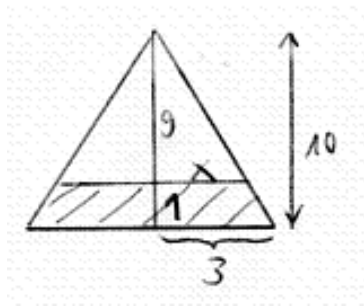
$$= 6 \cdot 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot \left(6 \cdot \frac{2^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \pi \cdot 0,6^2\right) + 2 \cdot \pi \cdot 0,6 \cdot 1,5 = 42,2 \text{ cm}^2$$

b) Masse des Körpers = $13,9 \cdot 7,9 = 109,8 \text{ Gramm}$

Aufgabe 33:

a) $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 10 = 120 \text{ cm}^3 = 120 \text{ ml}$

b)



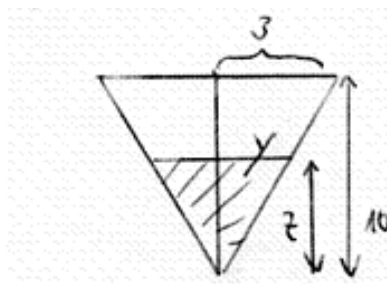
$$\text{Volumen der oberen Pyramide: } V = \frac{1}{3} (2x)^2 \cdot 9$$

Die Länge von x erhält man über den 2. Strahlensatz: $\frac{3}{10} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 2,7$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 5,4^2 \cdot 9 = 87,48 \text{ cm}^3$$

Damit ergibt sich, dass sich in der Lampe $120 - 87,48 = 32,52 \text{ cm}^3 = 32,52 \text{ ml Öl}$ befindet.

c)



Da das Volumen der kleinen Pyramide aus b) bekannt ist, gilt: $32,52 = \frac{1}{3} \cdot (2y)^2 \cdot z$ (*)

Da in der Formel zwei Variable auftreten, wird eine weitere Formel (2.Strahlensatz)

benötigt: $\frac{3}{10} = \frac{y}{z} \Rightarrow y = 0,3z$ einsetzen in (*)

$$\Rightarrow 32,52 = \frac{1}{3}(0,6z)^2 \cdot z \Rightarrow z^3 = 271 \Rightarrow z = 6,5 \text{ cm}$$

Das Öl steht in der Lampe 6,5 cm hoch.