



**Analytische Geometrie
Basisfach**

Baden-Württemberg - allgemeine Gymnasien
Abitur 2027/2028

Autor: Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: www.mathe-aufgaben.com

Vorwort

Liebe SchülerInnen und Schüler,

mit diesem Buch könnt ihr euch perfekt auf eure Klausuren im Basisfach und eure mündliche Abiturprüfung 2027 oder 2028 im Fach Mathematik (Baden-Württemberg, allgemeinbildende Gymnasien) vorbereiten.

In den Kapiteln 1 – 9 stellen wir euch die einzelnen Themen und die erforderlichen Formeln und Rechenwege mit Hilfe von vielen Beispielen ausführlich vor.

Nach jedem Kapitel findet ihr viele Übungsaufgaben, bei denen der jeweilige Anforderungsbereich steht.

Anforderungsbereich I: Reproduktion des Stoffes (einfache Grundaufgaben)

Anforderungsbereich II: Herstellung von Zusammenhängen (mittelschwere Aufgaben)

Anforderungsbereich III: Verallgemeinerung und Reflexion (schwierigere Aufgaben)

Für das Erreichen von mindestens 5 Notenpunkten müssen die Aufgaben zum Anforderungsbereich I und teils auch vom Anforderungsbereich II gelöst werden.

Für das Erreichen von mindestens 11 Notenpunkten müssen die Aufgaben zu allen 3 Anforderungsbereichen gelöst werden.

Damit habt ihr die Möglichkeit zu prüfen, ob ihr den Stoff auch tatsächlich verstanden habt und wie euer ungefähre Leistungsstand ist.

Im 10. Kapitel findet ihr außerdem insgesamt 6 Aufgabensätze aus den Empfehlungen des Regierungspräsidiums, so wie sie in einer mündlichen Prüfung im ersten bzw. zweiten Prüfungsteil vorkommen können.

Mit diesen Aufgabensätzen könnt ihr euch auf eure mündliche Prüfung vorbereiten.



VORSICHT FALLE:

Nach unserer Erfahrung hilft es, wenn man nicht nur darstellt, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche Fehler auftreten können.

Wir haben daher in diesem Buch auch typische Fehler dargestellt, die aufgrund unserer langjährigen Erfahrung immer wieder vorkommen.

Wer diese "Fettnäpfchen" kennt, kann ihnen besser ausweichen.

Die ausführlichen Musterlösungen aller Aufgaben aus dem Buch werden euch als pdf-Datei über einen geschlossenen Bereich auf unserer Homepage zur Verfügung gestellt. Damit könnt ihr überprüfen, ob ihr die Aufgaben richtig gelöst habt.

Informationen zur mündlichen Abiturprüfung 2023 findet ihr auf unserer Homepage.

Anregungen und konstruktive Kritik werden von uns gerne entgegengenommen und bei der nächsten Aktualisierung berücksichtigt. Bei Fragen stehen wir gerne zur Verfügung.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und für eure mündliche Prüfung!

Euer Team von mathe-aufgaben.com

Inhaltsverzeichnis

1	LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	1
1.1	DAS GAUß-VERFAHREN	2
1.2	LÖSUNGSMENGEN VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN	4
2	VEKTORRECHNUNG	7
2.1	PUNKTE UND VEKTOREN	7
2.2	RECHNEN MIT VEKTOREN	10
2.3	LINEARKOMBINATION VON VEKTOREN UND MITTELPUNKT EINER STRECKE	14
2.4	BETRAG VON VEKTOREN UND EINHEITSVEKTOREN	17
3	SKALARPRODUKT, WINKELBERECHNUNG	20
3.1	DEFINITION SKALARPRODUKT	20
3.2	WINKEL ZWISCHEN VEKTOREN	22
4	GERADEN	24
4.1	GERADENGLEICHUNGEN	24
4.2	LAGE ZWEIER GERADEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUM	27
4.2.1	Besondere Lage einer Gerade im Raum	27
4.2.2	Spurpunkte und Zeichnen von Geraden in ein Koordinatensystem	28
4.2.3	Lage zweier Geraden im dreidimensionalen Raum	30
5	EBENEN	35
5.1	TYPEN VON EBENENGLEICHUNGEN	35
5.2	AUFSTELLEN VON EBENENGLEICHUNGEN	37
5.3	DAS VEKTORPRODUKT ("KREUZPRODUKT")	41
5.4	UMFORMEN VON EBENENGLEICHUNGEN	43
5.4.1	Parameterform -> Koordinatengleichung	43
5.4.2	Koordinatengleichung -> Parameterform	43
5.5	LAGEBEZIEHUNG UND SCHNITT EINER GERADE MIT EINER EBENE	45
5.6	LAGEBEZIEHUNG UND SCHNITT ZWEIER EBENEN	48
5.7	ZEICHNEN VON EBENEN	50
5.7.1	Ebenen als Spurdreieck	50
5.7.2	Ebenen parallel zu einer Koordinatenachse	51
5.7.3	Die drei Koordinatenebenen und ihre Parallelebenen	52
6	SCHNITTWINKEL BEI GERADEN UND EBENEN	55
7	ABSTANDSBERECHNUNGEN	58
7.1	ABSTAND ZWISCHEN ZWEI PUNKTEN	58
7.2	ABSTAND ZWISCHEN EINEM PUNKT UND EINER EBENE	58
7.3	ABSTAND ZWISCHEN ZWEI ECHT PARALLELEN EBENEN	60
7.4	ABSTAND ZWISCHEN EINER EBENE UND EINER PARALLELEN GERADEN	60
8	FLÄCHENINHALT UND VOLUMEN	63
8.1	BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS VON VIERECKEN	63
8.2	BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS VON DREIECKEN	64
8.3	VOLUMEN PYRAMIDEN	66
9	SPIEGELUNGEN	69
9.1	SPIEGELUNG PUNKT AN PUNKT	69
9.2	SPIEGELUNG PUNKT AN EBENE	69
9.3	SPIEGELUNG GERADE AN EBENE	71
10	AUFGABEN FÜR DIE MÜNDLICHE PRÜFUNG	73
10.1	AUFGABENSATZ 1 (TEIL 1)	73

10.2	AUFGABENSATZ 2 (TEIL 1).....	74
10.3	AUFGABENSATZ 3 (TEIL 1).....	74
10.4	AUFGABENSATZ 4 (TEIL 2).....	75
10.5	AUFGABENSATZ 5 (TEIL 2).....	76
10.6	AUFGABENSATZ 6 (TEIL 2).....	77

1 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (das kürzen wir ab jetzt mit „LGS“ ab) besteht aus mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Die Anzahl der Gleichungen muss dabei nicht der Anzahl der Unbekannten entsprechen.

Beispiel 1.1:

Lineare Gleichungssysteme sind zum Beispiel

$$\begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 & a + b = 5 & \\ a) \quad -5x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 & b) \quad a - b = 9 & c) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad 6x_1 + x_2 - x_3 = 5 & 4a + b = 8 & \quad -6x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{array}$$

- a) 3 Gleichungen mit 3 Variablen
- b) 3 Gleichungen mit 2 Variablen (mehr Gleichungen als Variable → **überbestimmtes LGS**)
- c) 2 Gleichungen mit 3 Variablen (mehr Variable als Gleichungen → **unterbestimmtes LGS**)

Das Ziel bei der Lösung eines LGS besteht darin, dass ihr für jede Variable eine Zahl findet, so dass alle Gleichungen des LGS gelöst werden.

Für das LGS in Beispiel 1.1 a) ist die Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, was ihr durch Einsetzen der Zahlen in die 3 Zeilen nachprüfen könnt:

Zeile 1: $1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2$ passt
 Zeile 2: $-5 \cdot 1 - 2 + 4 \cdot 3 = 5$ passt
 Zeile 3: $6 \cdot 1 + 2 - 3 = 5$ passt

Diese Lösung war nun vorgegeben und ihr habt nur kontrolliert, dass die vorgegebene Lösung tatsächlich eine ist. Wie schafft ihr es aber, diese Lösung selbst zu berechnen?

Wir betrachten im nächsten Beispiel zunächst ein einfaches LGS, bei dem man die Lösung sofort ablesen kann.

Beispiel 1.2:

Gegeben ist folgendes LGS:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 3x_2 + x_3 & = & 9 \\ 5x_3 & = & 15 \end{array}$$

Dieses LGS ist in der so genannten **Stufenform** dargestellt. Ihr könnt es von unten nach oben lösen:

Aus der 3. Zeile folgt: $5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3$
 Aus der 2. Zeile folgt: $3x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow 3x_2 + 3 = 9 \Rightarrow x_2 = 2$
 Aus der 1. Zeile folgt: $2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

Die Lösungsmenge wird so dargestellt: $L = \{(1|2|3)\}$
 Hier darf die runde Klammer in den geschweiften Klammern nicht vergessen werden.
 Die Lösung muss entsprechend den Variablen sortiert aufgeschrieben werden.

1.1 Das Gauß-Verfahren

Damit ihr ein LGS lösen könnt, müsst ihr es zunächst auf eine Stufenform bringen. Hierzu stehen euch folgende Umformungsmöglichkeiten zur Verfügung:

- Zwei Gleichungen des LGS vertauschen
- Eine Gleichung mit einer beliebigen Zahl $b \neq 0$ durchmultiplizieren
- Zwei Gleichungen addieren oder subtrahieren

Das Rechenverfahren, um ein LGS in die Stufenform zu bringen, wird **Gauß-Verfahren** genannt. Dieses Gauß-Verfahren wird in Beispiel 1.3 vorgestellt:

Beispiel 1.3:

Umwandlung eines LGS in Stufenform

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 14 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 10 \\ 5x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 18 \end{array}$$

Um Schreibarbeit zu sparen, schreibt man das LGS zunächst in eine Matrix. Hierbei werden nur die Koeffizienten (Zahlen vor den Variablen) und die Ergebnisspalte des LGS in Tabellenform aufgeschrieben. Die Variablen lässt man weg.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 18 \end{array} \right)$$

1.Schritt:

Im ersten Schritt müsst ihr erreichen, dass die Zahlen in der linken Spalte unterhalb der obersten Zahl zu "0" werden.

Dies erreicht ihr durch Addition der 1. und 2.Zeile bzw. der 1. und 3.Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 18 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{\cdot(-2)} \\ \xleftarrow{\cdot(-5)} \end{array}$$

Hinweis:

Damit die Zahl 2 in der 1.Spalte zu 0 wird, müsst ihr vorher die 1.Zeile mit -2 multiplizieren, damit bei der Addition $-2 + 2 = 0$ ergibt. Bei der Addition der 1. und 3.Zeile muss die 1.Zeile zunächst mit -5 multipliziert werden.

Die Pfeile bedeuten jeweils eine Addition der entsprechenden Zeilen, wobei die Pfeilspitze dort hinzeigt, wo das Ergebnis der Summe stehen soll.

Die Zeile, von der die Pfeile wegzeigen (hier die 1.Zeile) schreibt ihr wieder ab. Die Multiplikation mit -2 bzw. mit -5 erfolgt nur bei der Addition der Zeilen.

$$\text{Ergebnis: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & -3 & -17 & -52 \end{array} \right)$$

2.Schritt:

Im zweiten Schritt müsst ihr durch Addition der 2. und 3. Zeile erreichen, dass der untere Eintrag (hier -3) zu 0 wird. Auch hier müsst ihr vorher die Zeilen mit geeigneten Zahlen durchmultiplizieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & -3 & -17 & -52 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

Die 2. Zeile, von der der Pfeil weg zeigt, wird dabei wieder abgeschrieben.

Ergebnis in Stufenform:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Nun besitzt unser LGS die geforderte Stufenform und wir können es von unten nach oben lösen:

Aus der 3. Zeile folgt: $x_3 = 2$

Aus der 2. Zeile folgt: $-x_2 - 6 \cdot 2 = -18 \Rightarrow x_2 = 6$

Aus der 1. Zeile folgt: $x_1 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 14 \Rightarrow x_1 = 0$

Lösungsmenge: $L = \{ (0 \mid 6 \mid 2) \}$

**VORSICHT FALLE:**

- Im 2. Schritt in Beispiel 1.3 dürft ihr nicht die 1. und 3. Zeile miteinander verrechnen, weil dadurch die Zahl 0 links unten, den ihr im 2. Schritt erzeugt habt, wieder zerstört werden würde.
- Wenn zu Beginn der Eintrag links oben 0 ist (siehe Fall A) oder einer komplizierten Zahl entspricht (siehe Fall B), solltet ihr zunächst die Zeilen vertauschen.

Fall A:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{array} \right)$$

Fall B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 1 & -4 & -5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Die Vertauschung im Fall B ist sinnvoll, weil ihr dann im 1. Schritt mit einfacheren Zahlen multiplizieren könnt.

- Anstatt 2 Zeilen zu addieren dürft ihr auch Zeilen subtrahieren. Allerdings passieren beim Subtrahieren erfahrungsgemäß mehr Rechenfehler.

1.2 Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

In den Beispielen in Kapitel 1.1 hatten die LGS immer genau eine Lösung. Dies ist jedoch nicht immer so, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen.

Beispiel 1.4:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 3 \\ x_1 & +7x_2 & -3x_3 & = & 4 \end{array}$$

Umwandlung in eine Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

1.Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \quad \boxed{} \\ \leftarrow \quad \boxed{} \\ | \cdot (-1) \quad \boxed{} \\ \leftarrow \quad \boxed{} \end{array}$$

2.Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad \boxed{} \\ \leftarrow \quad \boxed{} \end{array}$$

Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die 3. Zeile der Matrix ist eine Nullzeile und stellt die **wahre Aussage** $0 = 0$ dar.

Da ihr mit der 3. Zeile nichts berechnen könnt, könnt ihr diese Zeile für die weitere Berechnung ignorieren.

Dadurch bleibt ein unterbestimmtes LGS stehen, das mehr Variablen (3) als Gleichungen (2) besitzt. Das LGS besitzt **unendlich viele Lösungen**.

Um eine dieser unendlich vielen Lösungen zu bestimmen, beginnt ihr mit der 2. Zeile:

$$10x_2 - 5x_3 = 5.$$

Nun gebt ihr für eine Variable eine beliebige Zahl vor, z.B. $x_2 = 0$

$$\text{Daraus folgt } 10 \cdot 0 - 5x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\text{Aus der 1. Zeile folgt: } x_1 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Eine Lösung lautet also $(1|0|-1)$.

Beispiel 1.5:

Löse das LGS

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ & -7x_2 & -7x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -8x_2 & -5x_3 & = & 5 \end{array}$$

Umwandlung in eine Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array} \right)$$

1. Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

2. Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Die 3. Zeile der Matrix zeigt einen **Widerspruch**: $0 = -2$
Das heißt, dass das LGS **keine Lösung** besitzt.

Ein LGS kann eine der folgenden Lösungen besitzen:

- 1.) **keine** Lösung (Beispiel 1.5)
- 2.) **genau eine** Lösung (Beispiel 1.2 und 1.3)
- 3.) **unendlich viele** Lösungen (Beispiel 1.4)

Übungsaufgaben

Aufgabe 1-1: (II)

Untersuche, ob das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat.

Falls es eine Lösung hat, bestimme diese. Falls es unendlich viele Lösungen hat, gib 2 Lösungen an.

a)
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & & -3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & +2x_2 & & = & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & = & 3 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & -2 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrcr} 4x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -4x_2 & +6x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +9x_3 & = & -7 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrcr} -x_1 & -9x_2 & +8x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -2 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 9 \\ -2x_1 & -x_2 & +5x_3 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 4 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & & = & 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 1-2: (I)

Gib zwei Lösungen des folgenden LGS an:

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & \begin{array}{rcl} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 = 0 \\ -x_1 & & +5x_3 = 4 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{rcl} x_1 & -3x_2 & +x_3 = 5 \\ & x_2 & +2x_3 = 1 \\ & 0 \cdot x_2 & = 0 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 1-3: (III)

Ergänze das LGS $\begin{array}{rcl} x_1 & +3x_2 & -4x_3 = 2 \\ & x_2 & +2x_3 = -1 \end{array}$ um eine weitere Gleichung, sodass das LGS

- a) eine Lösung
- b) keine Lösung
- c) unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe 1-4: (II)

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe.

- a) Es gibt LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen, die keine Lösung besitzen.
- b) Ein LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen hat immer genau eine Lösung.
- c) Hat ein LGS mehr als eine Lösung, dann hat es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 1-5: (III)

Gegeben ist ein LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen.

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe.

- a) Enthält ein LGS die Gleichung $0 \cdot x_3 = 2$, so besitzt das LGS keine Lösung.
- b) Enthält ein LGS die Gleichung $0 \cdot x_3 = 0$, so besitzt das LGS unendlich viele Lösungen.
- c) Enthält ein LGS die Gleichung $x_3 = 4$, so besitzt das LGS genau eine Lösung.

2 Vektorrechnung

2.1 Punkte und Vektoren

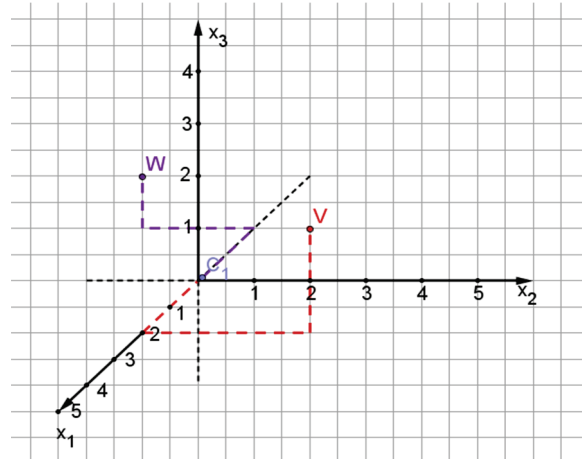
In der analytischen Geometrie arbeiten wir im dreidimensionalen Raum.

Da die Punkte drei Koordinaten benötigen, verwendet man als Koordinatensystem drei Achsen, die senkrecht aufeinander stehen und in der Regel Einheiten gemäß der folgenden Abbildung besitzen.

Ein Punkt im Koordinatensystem wird durch 3 Koordinaten festgelegt.

Den Punkt $V(2|3|2)$ markiert man, indem man vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten in x_1 -Richtung, 3 Einheiten in x_2 -Richtung und 2 Einheiten in x_3 -Richtung läuft.

Analog erhält man den Punkt $W(-2|-2|1)$.



VORSICHT FALLE:

Es ist im dreidimensionalen Koordinatensystem nicht möglich, von einem markierten Punkt eindeutig auf dessen Koordinaten zurück zu schließen. Wäre beispielsweise oben nur der Punkt V markiert ohne die gestrichelten Linien, könnte V z.B. auch die Koordinaten $V(0|2|1)$ haben.

Durch die Koordinatenachsen werden die drei Koordinatenebenen festgelegt, die in folgender Abbildung dargestellt sind.

Die Punkte P_1 bis P_3 liegen auf den

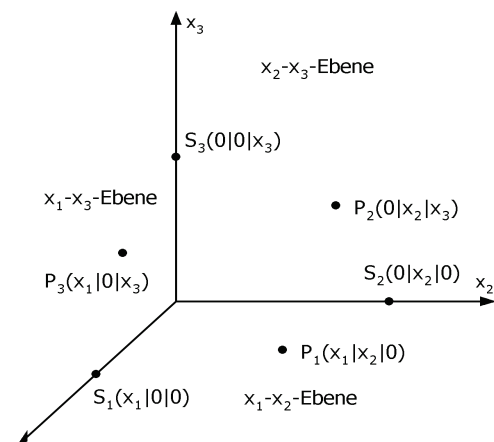
Koordinatenebenen.

Es fällt auf, dass *eine Koordinate* den Wert 0 annimmt.

Die Punkte S_1 bis S_3 liegen auf den

Koordinatenachsen.

Es fällt auf, dass *zwei Koordinaten* den Wert 0 annehmen.



In der analytischen Geometrie lösen wir geometrische Probleme im dreidimensionalen Raum rechnerisch.

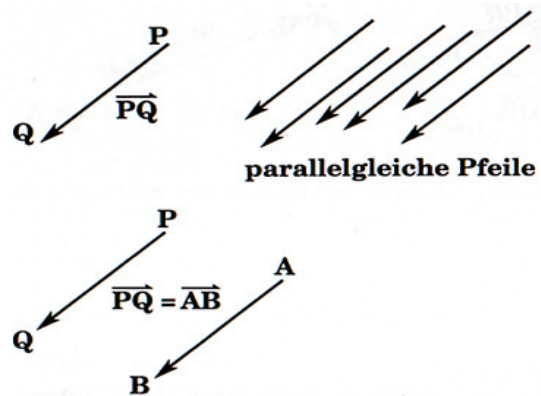
Es ist jedoch nicht möglich, mit Punkten zu rechnen, das heißt man kann Punkte z.B. nicht addieren oder subtrahieren. Deshalb rechnet man mit **Vektoren**.

Vektoren könnt ihr euch anschaulich als Pfeile vorstellen. Um einen Pfeil zu zeichnen, benötigt ihr einen Anfangs- und einen Endpunkt. Der Vektor, der von P nach Q zeigt, wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet.

Ein Vektor ist gekennzeichnet durch dessen Länge, dessen Richtung und seine Orientierung (Pfeilrichtung).

Zwei Vektoren, die in diesen drei Eigenschaften übereinstimmen, sind gleich.

In der rechten Abbildung sind alle Vektoren **gleich** (alle sind gleich lang, sind parallel und zeigen in dieselbe Richtung).



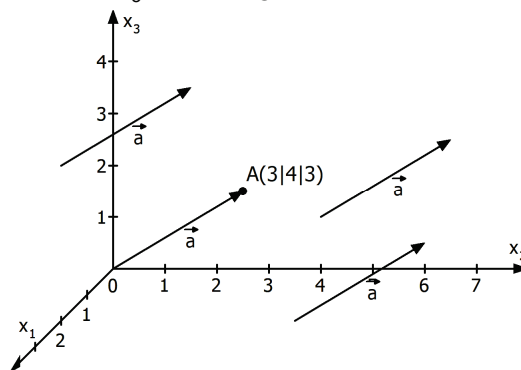
VORSICHT FALLE:

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ sind (trotz unterschiedlicher Anfangspunkte) gleich, da der Startpunkt eines Vektors keine Rolle spielt.

Beispiel 2.1:

Im Koordinatensystem sind Pfeile eingezeichnet, die alle den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ darstellen.

Man startet von einem beliebigen Punkt, geht dann 3 Einheiten in x_1 -Richtung, 4 Einheiten in x_2 -Richtung und 3 Einheiten in x_3 -Richtung.



In der Abbildung erkennt ihr, dass der Endpunkt A(3|4|3) des Vektors, der **im Ursprung startet**, dieselben Koordinaten besitzt wie der Vektor selbst– dies ist natürlich kein Zufall.

Ihr habt gerade gelernt, dass ein Vektor keinen bestimmten Anfangspunkt besitzt und grundsätzlich von jedem Punkt aus gezeichnet werden kann.

Hier gibt es nun folgende Ausnahme:

Es gibt spezielle Vektoren, die im Ursprung $O(0|0|0)$ des Koordinatensystems starten. Ein Vektor, der im Ursprung O startet und im Punkt A endet, nennt man den **Ortsvektor des Punktes A oder den Stützvektor des Punktes A**.

Wir verwenden in dem Buch künftig den Begriff „Ortsvektor“ anstatt „Stützvektor“.

Der Pfeil in Beispiel 2.1, der in $O(0|0|0)$ startet und in $A(3|4|3)$ endet, ist der Ortsvektor des Punktes A und kann durch $\overrightarrow{OA}$ dargestellt werden.



VORSICHT FALLE:

Es ist wichtig, dass ihr die Begriffe **Punkt**, **Vektor** und **Ortsvektor eines Punktes** unterscheiden könnt.

Der Punkt $A(3|4|3)$ ist eine Markierung im Koordinatensystem. Hierzu müsst ihr **vom Ursprung ausgehend** 3 Einheiten in x_1 -Richtung, 4 Einheiten in x_2 -Richtung und 3 Einheiten in x_3 -Richtung gehen, um den Punkt zu finden.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ entspricht anschaulich allen Pfeilen, bei denen ihr **in einem beliebigen**

Anfangspunkt startet und dann 3 Einheiten in x_1 -Richtung, 4 Einheiten in x_2 -Richtung und 3 Einheiten in x_3 -Richtung gehen müsst, um zum Pfeilende zu gelangen.

Der Ortsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ des Punktes $A(3|4|3)$ entspricht anschaulich dem Pfeil, bei denen ihr **im**

Ursprung startet und dann 3 Einheiten in x_1 -Richtung, 4 Einheiten in x_2 -Richtung und 3 Einheiten in x_3 -Richtung gehen muss, um zum Pfeilende im Punkt $A(3|4|3)$ zu gelangen.

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ des Punktes $P(p_1 | p_2 | p_3)$ hat immer **dieselben Koordinaten wie der Punkt P**.

Punkte müsst ihr **waagrecht** aufschreiben!
Vektoren müsst ihr **senkrecht** aufschreiben!

2.2 Rechnen mit Vektoren

Addieren zweier Vektoren: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Beispiel 2.2:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Das Ergebnis von Beispiel 2.2 b) ist der **Nullvektor**.

Anschaulich ist der Nullvektor ein „abstrakter“ Pfeil mit der Länge 0.

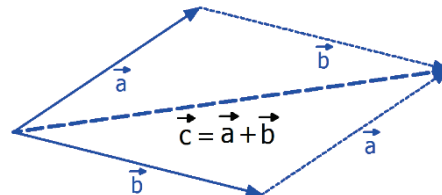
Ein Vektor stellt als Pfeil anschaulich eine Verschiebung dar.

Bei der **Addition** zweier Vektoren werden anschaulich zwei Verschiebungen hintereinander ausgeführt.

Hierzu werden die Pfeile „aneinandergehängt“.

An der Abbildung erkennt man, dass

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ gilt.}$$



Subtrahieren zweier Vektoren: $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

Beispiel 2.3:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Um die Subtraktion zweier Vektoren zu definieren, benötigt man zunächst den Begriff des **Gegenvektors**.

Der Vektor $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$ ist der **Gegenvektor** von $\vec{a}$. Der Gegenvektor zu $\vec{a}$ parallel und gleich lang wie $\vec{a}$, er zeigt nur in die entgegengesetzte Richtung.