

Aufgaben zur Körperrechnung

Gymnasium

Klasse 9 / 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2020

1. Aufgaben zu Kegeln zu Zylinder

Aufgabe 1:

Ein senkrechter Kegel aus Wachs hat den Grundkreisradius 6 cm und die Höhe 6 cm.

- Berechne das Volumen des Kegels.
- Der Kegel wird eingeschmolzen und zu einem Zylinder mit der gleichen Höhe 6 cm umgegossen. Berechne den Radius des Zylinders.
- Berechne die Oberfläche des Kegels und die Oberfläche des Zylinders aus b).

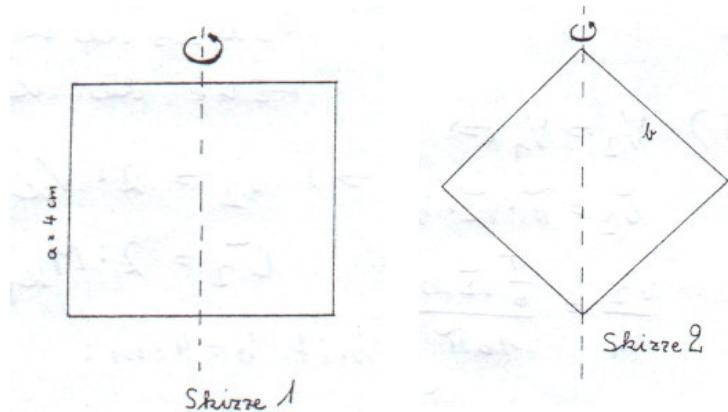
Aufgabe 2:

Ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 4$ cm rotiert um eine seiner Mittelparallelen.

Dadurch entsteht ein Zylinder mit dem Volumen V_1 und der Oberfläche O_1 (siehe Skizze 1).

Ein Quadrat mit der Seitenlänge b rotiert um eine seiner Diagonalen.

Dadurch entsteht ein Doppelkegel mit dem Volumen V_2 und der Oberfläche O_2 (siehe Skizze 2).



- Berechne V_1 und O_1 exakt.
- Zeige: Es ist $V_2 = \frac{1}{6} \pi \cdot \sqrt{2} \cdot b^3$ und $O_2 = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot b^2$.

Weise nach, dass für $b = 4$ cm gilt: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{O_2}{O_1}$

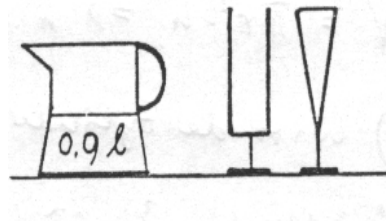
- Wie groß ist b , wenn $V_2 = V_1$ ist?

Aufgabe 3:

Auf einem Tisch stehen ein Krug mit 0,9 Liter Wasser, ein zylinderförmiges und ein kegelförmiges Gefäß.

Zylinder und Kegel haben beide den Grundkreisradius 5 cm und beide die Höhe 10 cm. Mit dem Wasser aus dem Krug wird zunächst eines der beiden Gefäße ganz gefüllt, das restliche Wasser wird danach in das andere Gefäß gegossen.

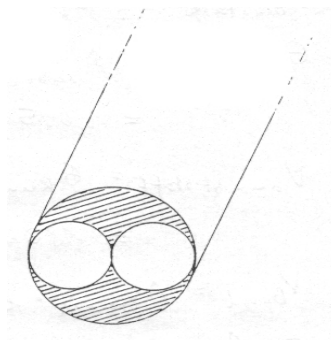
- a) Wie hoch steht das Wasser im Zylinder, wenn zuerst der Kegel gefüllt wird?
- b) Wie hoch steht das Wasser im Kegel, wenn zuerst der Zylinder gefüllt wird?

**Aufgabe 4:**

Zwei zylinderförmige Glasfasern mit gleich großen Durchmessern sind in eine Kunststoffummantelung eingeschmolzen (siehe Skizze).

Das so entstandene Kabel mit kreisförmiger Querschnittsfläche ist 180 m lang und hat einen Umfang von 5 mm.

- a) Zeige: Der Durchmesser einer Glasfaser ist etwa 0,8 mm. Berechne das Volumen des umhüllenden Kunststoffs in cm^3 .
- b) Das Glas dieses Kabels wird bei der Wiederverwertung zu einem senkrechten Kreiskegel umgeschmolzen. Wie hoch wird dieser Kegel, wenn sein Grundkreisdurchmesser und seine Höhe gleich groß sind?



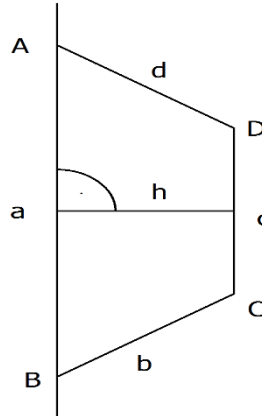
Aufgabe 5:

Ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit den parallelen Seiten $a = 24\text{cm}$ und $c = 12\text{cm}$ und der Höhe $h = 8\text{cm}$ rotiert um die Achse AB (siehe Skizze).

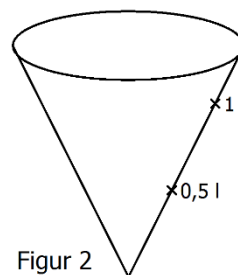
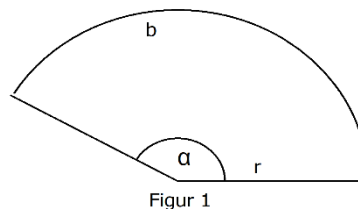
- Berechne das Volumen des Rotationskörpers.
- Berechne die Oberfläche des Rotationskörpers.

Nun sei die Länge der Seite c variabel, das Viereck ABCD aber immer noch gleichschenkl.

- Welches Volumen hat der Rotationskörper für $c = a = 24\text{cm}$?
- Für welche Länge von c hat der Rotationskörper ein Volumen von $1792 \cdot \pi \text{ cm}^3$?

**Aufgabe 6:**

- Der Kreisausschnitt aus Figur 1 hat den Radius $r = 21,54 \text{ cm}$ und den Bogen $b = 50,27 \text{ cm}$. Berechne seinen Mittelpunktswinkel und seinen Flächeninhalt.
- Aus dem Kreisausschnitt in Figur 1 wird (ohne Überlappung) ein Messbecher wie in Figur 2 geformt. Zeige: Die Höhe h des Messbechers beträgt ca. 20 cm . Welches Volumen hat dieser Messbecher?
- Der Messbecher soll längs einer Mantellinie mit Markierungen für die Füllmengen $0,5 \text{ Liter}$ und 1 Liter versehen werden. Welchen Abstand haben diese beiden Markierungen voneinander?



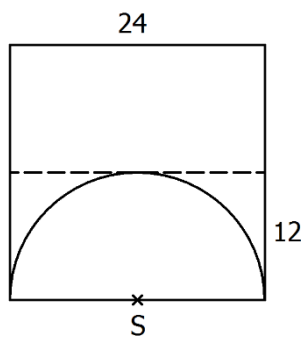
Aufgabe 7:

Abbildung 1

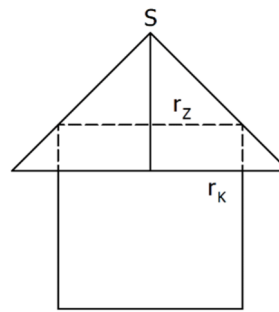


Abbildung 2

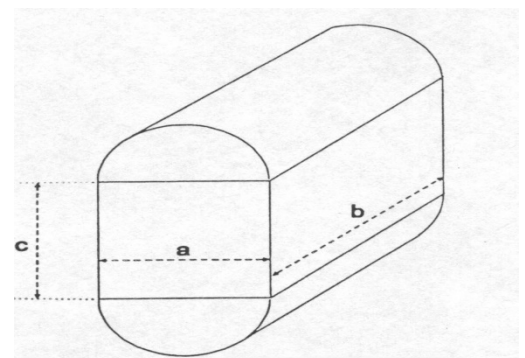
Ein Bastler schneidet ein Quadrat der Seitenlänge 24 cm in zwei gleich große Rechtecke (siehe Abbildung 1).

- Das obere Rechteck biegt er zum Mantel eines 12 cm hohen Kreiszylinders zusammen. Zeige, dass der Zylinderradius $r_z \approx 3,82$ cm ist. Berechne das Zylindervolumen.
- Aus dem unteren Rechteck schneidet er den abgebildeten Halbkreis aus und biegt ihn zum Mantel eines Kreiskegels zusammen. Zeige, dass sein Grundkreis den Radius $r_k = 6$ cm hat. Berechne das Volumen des Kegels.
- Der Kegel wird nun mit der Spitze nach oben über den Zylinder gestülpt (siehe Abbildung 2). Welche Gesamthöhe hat der entstandene Körper?

Aufgabe 8:

Ein Heizöltank besteht aus einem quaderförmigen Mittelteil und zwei halben Kreiszylindern (s. Skizze). Die Maße sind: $a = 1$ m, $b = 2$ m und $c = 1$ m.

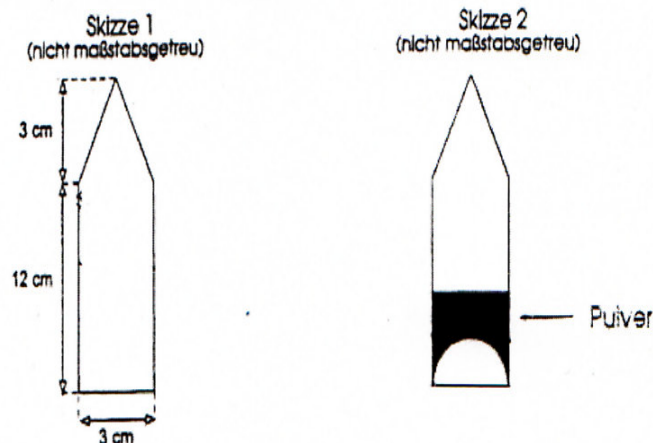
- Wieviel Liter Heizöl passen maximal in den Tank?
- In dem Tank befinden sich 2000 Liter Heizöl. Bis zu welcher Höhe ist er dann gefüllt?
- Der Heizöltank soll durch einen neuen Tank entsprechender Form (s. Skizze) ersetzt werden, der maximal 3000 Liter aufnehmen kann. Dabei sollen die Maße $b = 2$ m und $c = 1$ m wie beim alten Tank sein. Welche Breite a hat der neue Tank?



Aufgabe 9:

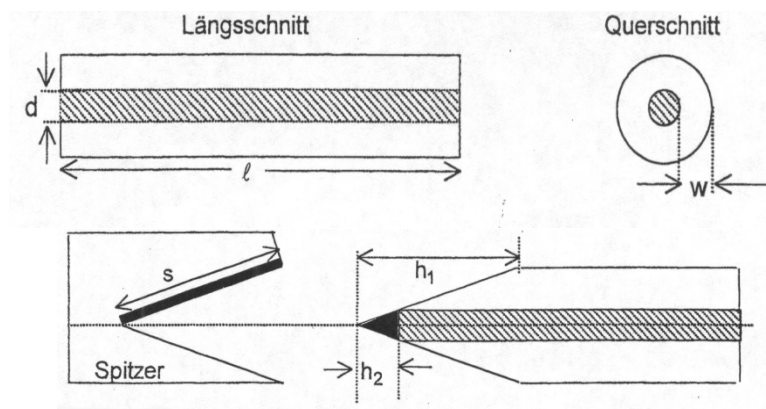
Eine Silvesterrakete besteht aus einem Kreiszylinder und einem aufgesetzten Kegel (siehe Skizze 1)

- Berechne das Volumen der Silvesterrakete (Ergebnis: $29,25 \cdot \pi \text{ cm}^3$)
- Die Rakete wird nun auf die Kegelspitze gestellt und zu 25% des Gesamtvolumens mit Pulver befüllt. Wie hoch steht das Pulver in der Rakete?
- Die so befüllte Rakete (siehe Teilaufgabe b)) wird mit einem halbkugelförmigen Boden verschlossen und wieder gedreht (siehe Skizze 2). Wie hoch steht jetzt das Pulver in der Rakete?

**Aufgabe 10:**

Ein zylinderförmiger, beidseitig ungespitzter Bleistift hat die Länge $l = 17,0 \text{ cm}$. Die Mine hat einen Durchmesser von $d = 2,0 \text{ mm}$. Sie ist in Holz eingefasst, das die Wandstärke $w = 2,5 \text{ mm}$ besitzt. (Skizzen nicht maßstabsgetreu)

- Wie groß ist das Volumen des Holzes, das die Mine umschließt?
- Mit einem Spitzer wird der Bleistift auf einer Seite kegelförmig angespitzt. Die Höhe dieses Kegels ist h_1 . Damit die Mine nicht so leicht abbricht, darf ihre Spitze nur $h_2 = 5,0 \text{ mm}$ aus dem Holz herausragen. Berechne h_1 . Welche Länge s hat das Messer dieses Spitzers mindestens?
- Nach mehrmaligem Spitzen sind vom Gesamtvolumen des ungespitzten Stiftes noch 20% übrig. Welche Gesamtlänge besitzt der Stift jetzt, wenn $h_1 = 17,5 \text{ mm}$ ist?



Aufgabe 11:

Ein Reagenzglas, das aus einer Halbkugel von 3 cm Innendurchmesser und einem 17,5 cm hohen Kreiszylinder zusammengesetzt ist, enthält 100 cm³ Wasser (vgl. Abb. 1).

- Berechne den Abstand d des Wasserspiegels von der Oberkante des Reagenzglases.
- Das Wasser aus dem Reagenzglas wird vollständig in ein Kelchglas, das innen die Form eines geraden Kreiskegels besitzt (vgl. Abb. 2), eingefüllt.
Zu wie viel Prozent seines Gesamtvolumens ist das Kelchglas dann gefüllt?
- Dem Wasser im Kelchglas wird nun Natronlauge zugegeben, so dass die gesamte Flüssigkeit 12 cm hoch steht. Berechne das Volumen der zugefügten Natronlauge.

Abb. 1 Reagenzglas
(nicht maßstäblich)

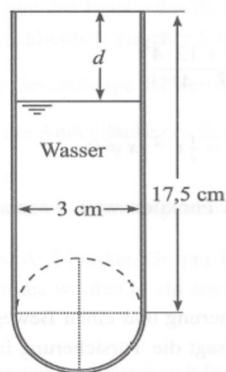
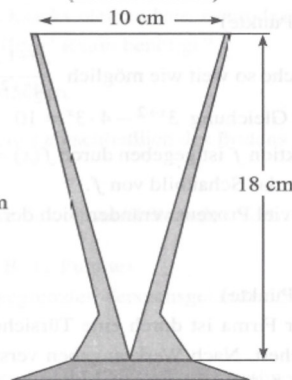
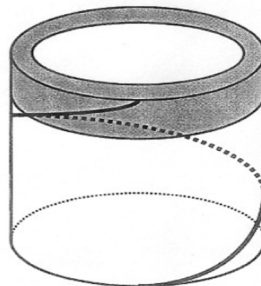


Abb. 2 Kelchglas
(nicht maßstäblich)

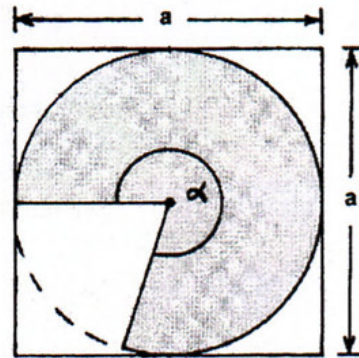
**Aufgabe 12:**

Berti entdeckt in dem Schatzkästchen seiner Oma eine zylinderförmige Blumenvase. Die Vase ist außen 15 cm hoch, Wand- und Bodenstärke betragen jeweils 1 cm, der Innendurchmesser 10 cm.

- Berti bemalt den oberen Rand sowie daran anschließend einen überall 2 cm breiten Streifen auf der Außenseite der Vase mit Silberfarbe. Wie groß ist die bemalte Fläche?
- Jetzt entdeckt Berti noch einen eisernen Briefbeschwerer in der Form eines geraden Kegels. Bei diesem Kegel sind Mantellinie und Grundkreisdurchmesser jeweils 9 cm lang. Berti stellt den Kegel mit der Spitze nach oben in die Vase und füllt anschließend einen halben Liter Wasser in die Vase. Untersuche, ob der Kegel vollständig von Wasser bedeckt wird.
- Über den äußeren Mantel der Vase verläuft ein Goldfaden von ihrem unteren Rand aus genau einmal um die Vase herum bis zu ihrem oberen Rand. Wie lang ist ein solcher Goldfaden?

Aufgabe 13:

Zur Herstellung eines Gefäßes wird aus einem quadratischen Blech der Seitenlänge $a = 25\text{cm}$ ein größtmöglicher Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 288^\circ$ ausgestanzt (siehe Skizze).

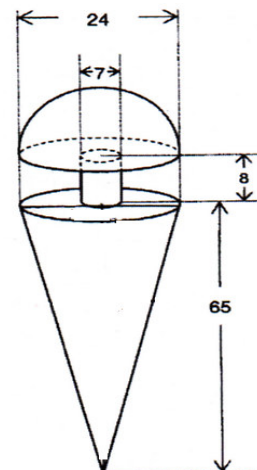


- Wie viel Prozent des Blechs gehen beim Ausstanzen als Abfall verloren?
- Der Kreisausschnitt wird nun so gebogen und verlötet, dass ein kegelförmiges Gefäß entsteht. Berechne das Volumen des Gefäßes. (Die Dicke des Blechs wird vernachlässigt).
- Ein kegelförmiges Gefäß mit dem Radius $r = 10\text{cm}$ und der Höhe $h = 7,5\text{ cm}$ wird mit Flüssigkeit gefüllt. Wie hoch steht die Flüssigkeit, wenn die halbe Mantelfläche benetzt ist?

Aufgabe 14:

Der abgebildete Flaschenverschluss ist zusammengesetzt aus einem Kreiskegel, einem Kreiszylinder und einer Halbkugel (siehe Abbildung; Maße in Millimeter).

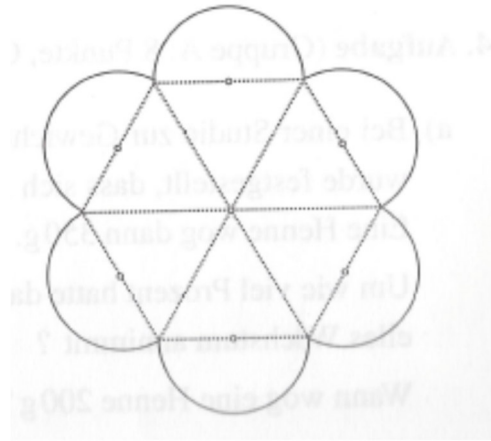
- Der Flaschenverschluss ist aus Stahl hergestellt. Berechne das Gewicht des Flaschenverschlusses, wenn 1 cm^3 Stahl $7,9\text{ g}$ wiegt.
- Wie tief steckt der Verschluss in einem Flaschenhals mit dem Innendurchmesser 18 mm ? Welchen Flächeninhalt hat der Teil des Kegelmantels, der sich dann innerhalb der Flasche befindet?



Aufgabe 15:

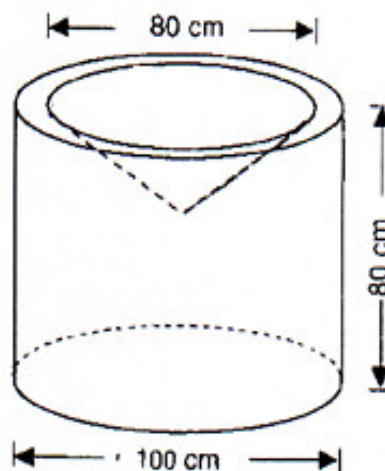
Die nebenstehende regelmäßige Figur wird von Halbkreisen begrenzt, die den Radius r haben. Für $r = 1$ dm stellt sie den Querschnitt durch eine Marmorsäule dar, die 2 m hoch ist. Ein Kubikdezimeter Marmor wiegt 2,55 kg.

- Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche. Untersuche, ob die Säule mehr als eine Tonne wiegt.
- Die Säule soll auf einen zylindrischen Marmorsockel gestellt werden, der höchstens 100 kg wiegen darf. Der Sockel soll 1,5 dm hoch werden. Untersuche, ob er so angefertigt werden kann, dass die Säule nicht übersteht.

**Aufgabe 16:**

Aus einem Marmorblock wird ein zylinderförmiger Brunnen hergestellt. Der Gesamtdurchmesser des Brunnens beträgt 100 cm, seine Gesamthöhe 80 cm. In der Mitte befindet sich eine kegelförmige Vertiefung mit dem Innendurchmesser 80 cm und der Tiefe 30 cm.

- Welches Gewicht hat der Brunnen, wenn 1 m³ Marmor 2800 kg wiegt?
- Der Brunnen wird aufgestellt und alle sichtbaren Oberflächen werden nun poliert. Wie groß ist die zu polierende Fläche?
- In den Brunnen werden 30 Liter Wasser eingefüllt. Wie hoch steht das Wasser im Becken?



Aufgabe 17:

Von einem Kegel weiß man, dass der Flächeninhalt seines Mantels 4mal so groß ist wie der des Grundkreises. Berechne die Weite des Mittelpunktwinkels des abgerollten Mantels.

Aufgabe 18:

Um wie viel Prozent nehmen Volumen und Mantelfläche eines Zylinders zu, wenn man den Radius des Zylinders um 10% vergrößert und die Höhe unverändert lässt?

Aufgabe 19:

Eine zylindrische Kaffeedose hat einen Radius von 9,4 cm und eine Innenhöhe von 12 cm. Sie ist zu 90% mit Kaffee gefüllt. Der Dose liegt ein Dosierlöffel mit der Form einer Halbkugel bei. Man kann mit dem in der Dose enthaltenen Kaffee 106 Dosierlöffel gestrichen füllen.

- a) Wie viel Kaffee befindet sich in der Dose?
- b) Berechne den Innenradius des Dosierlöffels.

Aufgabe 20:

Ein Reagenzglas hat die Form einer Halbhohlkugel mit Innenradius 1,2 cm und eines aufgesetzten Hohlzylinders mit gleichem Radius und Höhe 14 cm. Das Glas hat eine Dicke von 2 mm.

- a) Wie viele ml kann man maximal in das Reagenzglas füllen?
- b) Das Reagenzglas soll mit einer Messskala versehen werden. Wie weit unter dem oberen Rand des Reagenzglases muss man die Markierungslinie für 40 ml anbringen?
- c) Die verwendete Glassorte besitzt eine Dichte von $2,32 \text{ g/cm}^3$. Berechne die Masse des Reagenzglases.

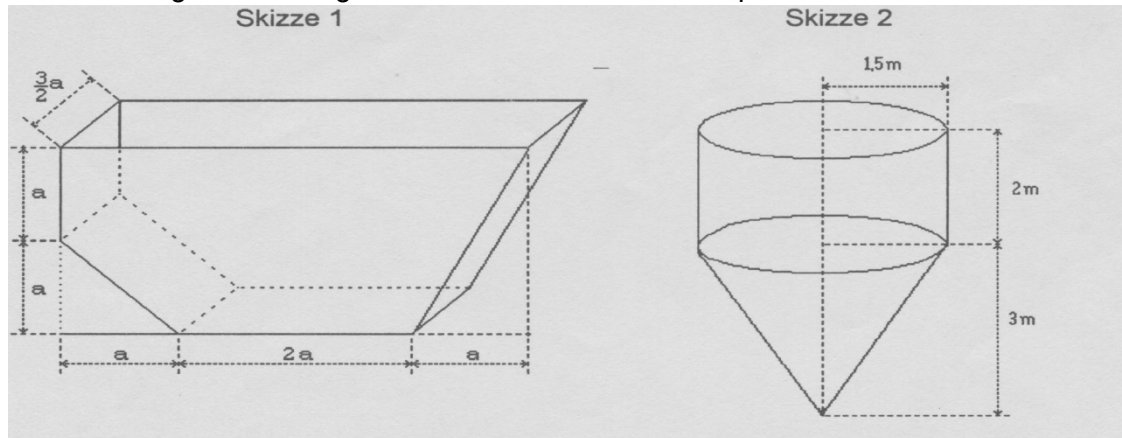
Aufgabe 21:

Ein zylinderförmiges Gefäß mit einem Durchmesser von 9 cm und einer Höhe von 10 cm ist bis zur Hälfte mit einer Flüssigkeit gefüllt. Man lässt darin eine Kugel mit einem Durchmesser von 3,6 cm vollständig untertauchen. Um wie viele cm steigt der Flüssigkeitsspiegel im Zylinder daraufhin an?

2. Aufgaben zu Pyramiden und Prismen

Aufgabe 22:

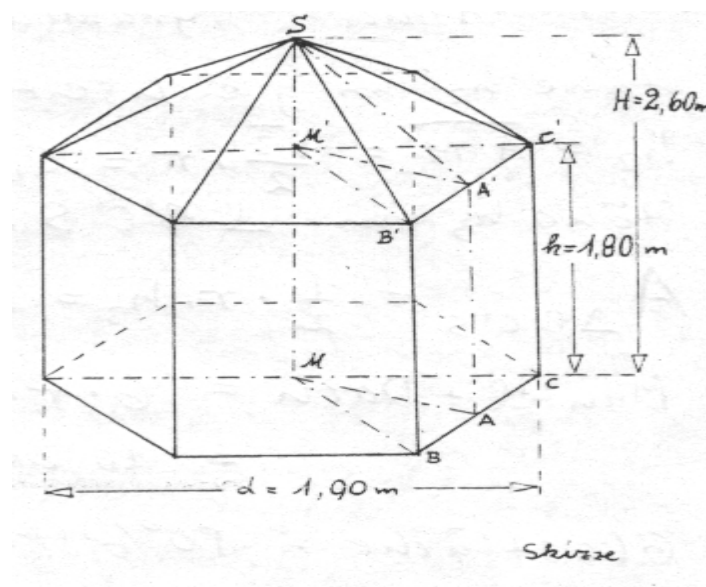
Die Skizze 1 zeigt das Schrägbild eines oben offenen Transportcontainers.



- Berechne das Fassungsvermögen des dargestellten Containers für $a = 1,5 \text{ m}$.
- Der Container ist nur bis zur halben Höhe gefüllt. Wie viel Prozent seines Fassungsvermögens sind das?
- In den Container werden 10 m^3 Sand eingeladen und zu einer Baustelle gebracht. Dort wird der Sand in ein bereitstehendes leeres Silo (Skizze 2) eingefüllt. Das Silo besteht aus einem senkrechten Kreiszylinder und einem daran angesetzten Trichter in Form eines senkrechten Kreiskegels. Die Maße sind der Skizze 2 zu entnehmen. Bis zu welcher Höhe ist das Silo nun gefüllt?

Aufgabe 23:

Die Abbildung zeigt ein Glashaushaus. Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck. Das Dach mit der Spitze S wird von 6 gleichschenkligen Dreiecken gebildet. Die Größenangaben sind der Skizze zu entnehmen.



- Berechne das Volumen des Hauses.
- Zeige, dass die Höhe A'S im Dreieck B'C'S etwa $1,15 \text{ m}$ lang ist.
Berechne die Glasfläche, wenn Mantel und Dach des Kaktushauses zu 80% aus Glas bestehen.

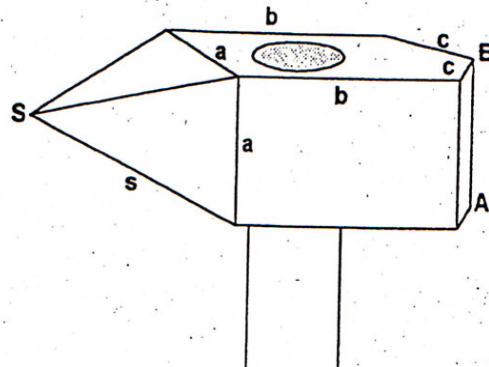
Aufgabe 24:

Das Schrägbild zeigt einen Steinmetzhammer. Der Hammerkopf hat die Form eines Quaders, bei dem auf der einen Seite eine regelmäßige senkrechte Pyramide, auf der anderen ein dreiseitiges Prisma angesetzt ist.

Die zylindrische Bohrung im Quader für den Stiel hat den Durchmesser $d = 2,5 \text{ cm}$.

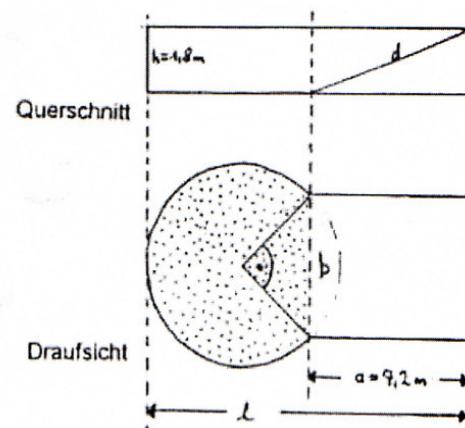
Die in der Figur benannten Kanten haben die Längen $a = 5,1 \text{ cm}$, $b = 8,3 \text{ cm}$, $c = 3,3 \text{ cm}$ und $s = 7,2 \text{ cm}$. Die Spitze der Pyramide ist S , die Mitte der Kante AB ist M .

- Berechne die Länge $\overline{SM}$ des Hammerkopfes.
- Berechne die Masse des Hammerkopfes, wenn er aus Stahl besteht, von dem 1 cm^3 die Masse $7,8 \text{ g}$ hat.

**Aufgabe 25:**

Ein kreisrundes Schwimmbecken hat einen Durchmesser von $9,9 \text{ m}$ und ist überall $1,8 \text{ m}$ tief.

- Das Becken ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Wie lange dauert die Entleerung, wenn pro Minute 400 Liter abfließen?
- Im Zuge des Umbaus wird ein Teil des Beckens entfernt und dafür ein rechteckiger Beckenteil angebaut, dessen Boden schräg ansteigt. (Winkel- und Längenangaben siehe Skizze).
Berechne für das neue Becken den Inhalt G der Grundfläche des $1,8 \text{ m}$ tiefen Teils (in der Skizze punktiert).
Welche Breite b hat der rechteckige Teil des neuen Beckens?
Wie groß ist die in der Skizze eingetragene Länge l ?

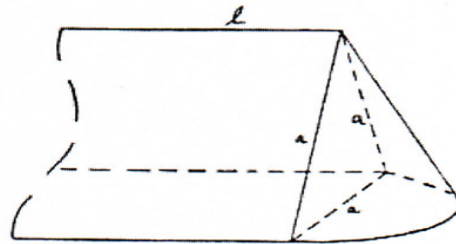


- Das neue Becken aus Teil b) wird vollständig mit Wasser befüllt. Wie viel Liter sind dazu nötig, wenn $G = 70 \text{ m}^2$ und $b = 7 \text{ m}$ sind?

Aufgabe 26:

Ein senkrechtes Prisma P besitzt als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 6,0$ cm. Die Höhe des Prismas ist $l = 4a$ (siehe Skizze).

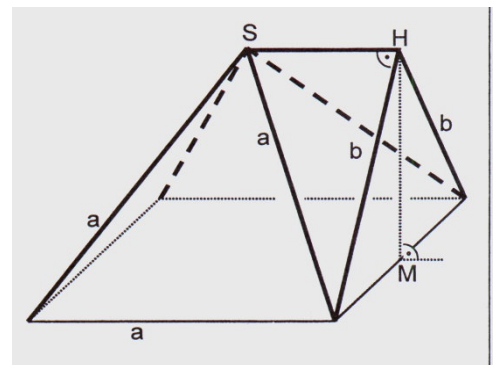
- Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas.
- An beiden Dreiecksflächen des Prismas werden Kegelhälften angesetzt. Dadurch entsteht ein neuer Körper K (vgl. Skizze). Um wie viel Prozent vergrößert sich dabei das Volumen?
- Zeige, dass dieser Prozentsatz unabhängig von a ist.

**Aufgabe 27:**

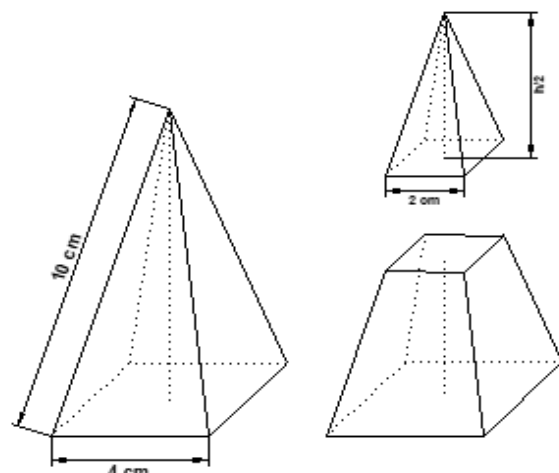
Ein Zelt besteht aus einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit an der Seite angeschlossenem geschlossenem Vorzelt (s. Skizze; Zeltstangen sind fett eingezeichnet). Alle Kanten der regelmäßigen quadratischen Pyramide besitzen die Länge $a = 2,20$ m. Die Firststange SH verläuft parallel zum Boden.

Der Punkt H befindet sich senkrecht über der Seitenmitte M .

- Ein zylinderförmiger Packsack hat den Durchmesser 12 cm und die Länge 0,60 m. Wie viel Prozent des Inhalts des Packsacks bleiben leer, wenn das zusammengelegte Zelt einschließlich Zubehör $5,0 \text{ dm}^3$ benötigt?
- Berechne die Gesamtlänge der Zeltstangen.
- Wie groß ist die Außenfläche des Zeltes einschließlich des Bodens?
- Welches Volumen hat das aufgebaute Zelt einschließlich des Vorbaus?

**Aufgabe 28:**

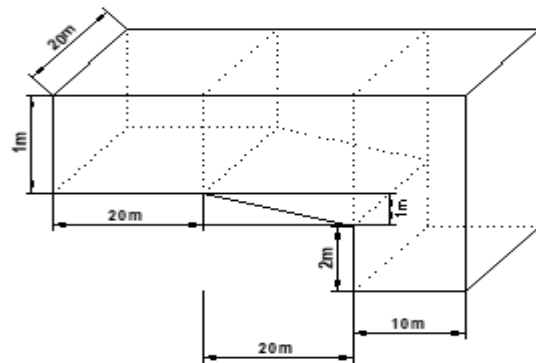
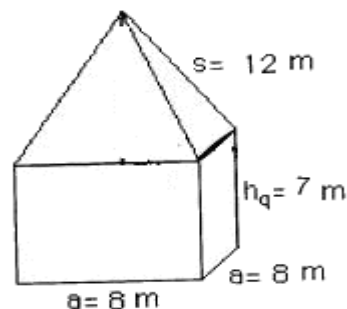
- Die nebenstehende vierseitige Pyramide hat die angegebenen Maße. Berechne daraus die Mantelfläche und das Volumen der Pyramide.
- Die Pyramide wird in der halben Höhe abgetrennt. (siehe Zeichnung mit den Maßen!). Welcher prozentuale Anteil des Gesamt-volumens bleibt als Pyramidenstumpf erhalten?



Aufgabe 29:

Das (nicht maßstabsgetreu) abgebildete Schwimmbecken wird vollständig bis zur Oberkante mit Wasser gefüllt.

- Wie lange dauert der Füllvorgang, wenn in jeder Sekunde 50 l Wasser einlaufen?
- Nach welcher Zeit steht das Wasser im Schwimmbecken bereits 2,5 m hoch?

**Aufgabe 30:**

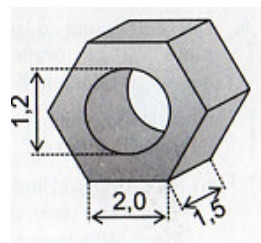
Ein Körper besteht aus einem Holzquader mit einer aufgesetzten Eisenpyramide.

- Berechne die Höhe der Pyramide.
- Berechne das Volumen und die Oberfläche des Körpers.
- Welche Masse hat der Körper? ($\rho_{\text{Holz}} = 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $\rho_{\text{Eisen}} = 7,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)

Aufgabe 31:

Von einem regelmäßigen sechseitigen Prisma mit der Grundkante $a = 4 \text{ cm}$ kennt man das Volumen $V = 648 \text{ cm}^3$.

- Bestimme die Länge der Höhe h und den Inhalt der Mantelfläche des Prismas.
- Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit gleichem Volumen?

Aufgabe 32:

(Maße in cm)

- Berechne das Volumen und die Oberfläche des dargestellten Körpers.
- Wie viel wiegt der Körper, wenn er aus Stahl mit einer Dichte von $\rho_{\text{Stahl}} = 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ besteht?

Aufgabe 33:

Eine Öllampe hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Innenmaße der Pyramide sind: Höhe $h = 10$ cm und Grundkante $a = 6$ cm.

- Wie viele ml Öl kann man maximal in die Lampe einfüllen?
- Wie viel Öl befindet sich in der Lampe, wenn das Öl im Innern bis 1 cm über dem Boden steht?
- Zum Nachfüllen von Öl muss man die Lampe so umdrehen, dass die Spitze nach unten weist (siehe Abbildung). Wie hoch steht nun das Öl in der Lampe, wenn man die Füllmenge von b) annimmt?

