



Stochastik
grundlegendes Anforderungsniveau (gAn)

Baden-Württemberg – berufliche Gymnasien
Abitur 2027/2028

Autor: Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: www.mathe-aufgaben.com

Vorwort

Zunächst einmal bedanken wir uns für das Vertrauen, das ihr uns mit dem Kauf dieses Buches entgegengebracht habt!

Der darin enthaltene Stoff der **Stochastik** ist auf den Inhalt der **Abiturprüfung 2027 und 2028** von **Baden-Württemberg** für **berufliche Gymnasien (grundlegendes Anforderungsniveau, gAn)** abgestimmt.

Das Buch soll euch bei der erfolgreichen Vorbereitung auf Klausuren und die Abiturprüfung unterstützen.

In den einzelnen Kapiteln stellen wir zunächst die einzelnen Themen und die erforderlichen Formeln und Rechenwege mit Hilfe von vielen Beispielen ausführlich vor.

Nach jedem Kapitel findet ihr viele Übungsaufgaben, bei denen der jeweilige Anforderungsbereich steht.

Anforderungsbereich I: Reproduktion des Stoffes (einfache Grundaufgaben)

Anforderungsbereich II: Herstellung von Zusammenhängen (mittelschwere Aufgaben)

Anforderungsbereich III: Verallgemeinerung und Reflexion (schwierigere Aufgaben)

Für das Erreichen von mindestens 5 Notenpunkten müssen die Aufgaben zum Anforderungsbereich I und teils auch vom Anforderungsbereich II gelöst werden.

Für das Erreichen von mindestens 11 Notenpunkten müssen die Aufgaben zu allen 3 Anforderungsbereichen gelöst werden.

Damit habt ihr die Möglichkeit zu prüfen, ob ihr den Stoff auch tatsächlich verstanden habt und wie euer ungefähre Leistungsstand ist.

Die Musterlösungen aller Übungsaufgaben aus dem Buch werden als pdf-Dateien über einen geschlossenen Download-Bereich auf unserer Homepage zur Verfügung gestellt.



VORSICHT FALLE:

Nach unserer Erfahrung hilft es euch, wenn wir nicht nur darstellen, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche typischen Fehler auftreten können.

Daher findet ihr in dem Buch zwischendurch auch „Vorsicht Falle“ – Hinweise mit typischen Fehlern, die aufgrund unserer langjährigen Erfahrung immer wieder gemacht werden.

In diesem Buch sind keine Original-Abiturprüfungsaufgaben der vergangenen Jahre enthalten.

Die alten Abituraufgaben könnt ihr inkl. Lösungen kostenfrei auf www.mathe-aufgaben.com unter dem Menüpunkt Aufgaben -> Abitur herunterladen.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von uns gerne entgegengenommen.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung!

Euer Team von mathe-aufgaben.com

Inhaltsverzeichnis

1	Zufallsexperimente und Pfadregeln	1
1.1	Begriffe Ergebnismenge, Ereignis, Gegenereignis	1
1.2	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen	3
1.3	Baumdiagramme und Pfadregeln	7
2	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit	17
2.1	Schnitt und Vereinigung von Mengen	17
2.2	Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten	19
2.3	Vierfeldertafeln	20
2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	22
2.5	Baumdiagramm oder Vierfeldertafel?	27
2.6	Unabhängigkeit von Ereignissen	29
3	Zufallsgrößen, Erwartungswert, Varianz	37
3.1	Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung	37
3.2	Erwartungswert einer Zufallsgröße	40
3.3	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße	43
4	Kombinatorik – Urnenmodelle	51
4.1	Allgemeines Zählprinzip und Permutation	51
4.2	Formeln der Kombinatorik und Binomialkoeffizient	53
4.3	Spezielles Urnenmodell zur Ziehung mit einem Griff	57
5	Binomialverteilung	63
5.1	Bernoulli-Ketten	63
5.2	Binomialverteilte Zufallsgrößen	65
5.3	Kumulierte / Aufsummierte Binomialverteilungen	69
5.4	Erwartungswert, Varianz Standardabweichung bei Binomialverteilungen	73
5.5	Besondere Fragestellungen zu Binomialverteilungen	75

1 Zufallsexperimente und Pfadregeln

Unter Zufallsexperimenten versteht man Experimente, bei denen vor der Durchführung des Experimentes zwar bekannt ist, welche Ergebnisse prinzipiell möglich sind, aber der Ausgang des Experimentes nicht vorhersagbar ist und vom „Zufall“ abhängt.

Zufallsexperimente treten im täglichen Leben auf, da fast alle Geschehnisse mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind. Zufallsexperimente treten nicht nur bei Glücksspielen wie Lotto, Würfeln oder Roulette auf, sondern auch in der Medizin (Wirksamkeit von Medikamenten) oder bei Versicherungen (Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Schadens).

Ein Zufallsexperiment kann einstufig oder mehrstufig sein. Zufallsexperimente nennt man *einstufig*, wenn das Experiment nur einmal durchgeführt wird (z.B. es wird einmal gewürfelt, einmal eine Kugel aus einer Urne gezogen).

Häufig werden Zufallsexperimente jedoch mehrmals hintereinander durchgeführt (mehrmaliges Würfeln, mehrmaliges Drehen eines Glücksrades,...). Dann spricht man von einem *mehrstufigen Zufallsexperiment*.

1.1 Begriffe Ergebnismenge, Ereignis, Gegenereignis

In der Stochastik tauchen spezielle Begriffe auf, die ihr nun kennenlernt.

Begriff Ergebnismenge:

Die Ergebnismenge wird häufig mit S abgekürzt. Diese Menge enthält alle Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment auftreten können.

Hier einige Beispiele von Ergebnismengen für einstufige Zufallsexperimente:

.....
Beispiel 1.1:

- a) Man würfelt einmal mit einem Spielwürfel. Ergebnismenge: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - b) Bei der Ziehung eines Loses in einer Tombola kann eine Niete oder ein Gewinn gezogen werden. Ergebnismenge: $S = \{\text{Gewinn}, \text{Niete}\}$.
 - c) Beim Werfen einer Münze kann Zahl oder Wappen fallen. Ergebnismenge $S = \{\text{Zahl}, \text{Wappen}\}$.
 - d) Eine Urne enthalte rote, blaue und schwarze Kugeln. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Ergebnismenge: $S = \{\text{blau}, \text{rot}, \text{schwarz}\}$.
-

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten müsst ihr bei den möglichen Ergebnissen jeweils die Reihenfolge beachten, in der die Ergebnisse jedes einzelnen Versuches nacheinander auftreten können.

Beispiel 1.2:

a) Man wirft zweimal eine Münze mit den Seiten W = Wappen und Z =Zahl.

Ergebnismenge $S = \{ (W;W), (W;Z), (Z;W), (Z;Z) \}$

b) Man zieht zwei Kugeln aus einer Urne mit blauen und weißen Kugeln:

Ergebnismenge $S = \{ (b;b), (b;w), (w;b), (w;w) \}$.

Die runden Klammern stellen eine geordnete Menge dar.

$(b;w)$ heißt, dass zuerst eine blaue und dann eine weiße Kugel gezogen wird.

$(w;b)$ heißt, dass zuerst eine weiße und dann eine blaue Kugel gezogen wird.

Begriff Ereignis:

Ein "Ereignis" ist eine Menge, in der nur bestimmte Ergebnisse der Ergebnismenge enthalten sind.

Beispiel 1.3:

Ein Würfel wird einmal geworfen mit der Ergebnismenge $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Ereignis A: „Augenzahl ist gerade“ – in Mengenschreibweise $A = \{ 2, 4, 6 \}$

Ereignis B: „Augenzahl ist kleiner als drei“ – in Mengenschreibweise $B = \{ 1, 2 \}$

Ereignis C: „Augenzahl ist größer als sechs“ – in Mengenschreibweise $C = \{ \}$

Ereignis D: „Es wird eine Primzahl gewürfelt“ – in Mengenschreibweise $D = \{ 2, 3, 5 \}$

Man sagt, dass ein Ereignis "eingetreten" ist, wenn eine Zahl, die in der Ereignismenge enthalten ist, gewürfelt wird.

In Beispiel 1.3 würde gelten:

Wird die Augenzahl 2 gewürfelt, sind die Ereignisse A, B und D eingetreten.

Wird die Augenzahl 1 gewürfelt, ist das Ereignis B eingetreten.

Beispiel 1.4:

Eine Münze wird zweimal geworfen mit $S = \{ (W;W), (W;Z), (Z;W), (Z;Z) \}$

Ereignis A: „genau einmal Wappen“ – in Mengenschreibweise $A = \{ (W;Z), (Z;W) \}$

Ereignis B: „niemals Wappen“ – in Mengenschreibweise $B = \{ ZZ \}$

Begriff Gegenereignis:

Zu jedem Ereignis A gibt es ein Gegenereignis, das mit $\bar{A}$ bezeichnet wird.

Das Gegenereignis $\bar{A}$ ist eine Menge, in der alle Ergebnisse enthalten sind, die zwar in der Ergebnismenge S , aber nicht im Ereignis A enthalten sind.

Beispiel 1.5:

Ein Würfel wird einmal geworfen mit der Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ereignis A: "Augenzahl ist größer als 3" – in Mengenschreibweise $A = \{4, 5, 6\}$

Gegenereignis $\bar{A}$: "Augenzahl ist *kleiner oder gleich* 3", also $\bar{A} = \{1, 2, 3\}$

Ereignis B: "Augenzahl ist höchstens 4" – in Mengenschreibweise $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Gegenereignis $\bar{B}$: „Augenzahl ist größer als 4", also $\bar{B} = \{5, 6\}$

Ereignis C: "Augenzahl ist durch 3 teilbar", also $C = \{3, 6\}$

Gegenereignis $\bar{C}$: "Augenzahl ist nicht durch 3 teilbar", also $\bar{C} = \{1, 2, 4, 5\}$

**VORSICHT FALLE:**

Bei der Formulierung eines Gegenereignisses passieren gerne Fehler, wenn Begriffe wie "mindestens" oder "höchstens" ins Spiel kommen.

Zufallsexperiment: Drehen eines Glücksrades mit den Feldern 1 - 12.

Ereignis A	Gegenereignis $\bar{A}$
Feldzahl ist > 7 ("größer als 7")	Feldzahl ist ≤ 7 ("höchstens 7")
Feldzahl ist ≥ 7 ("mindestens 7")	Feldzahl ist < 7 ("kleiner als 7")
Feldzahl ist < 7 ("kleiner als 7")	Feldzahl ist ≥ 7 ("mindestens 7")
Feldzahl ist ≤ 7 ("höchstens 7")	Feldzahl ist > 7 ("größer als 7")

1.2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Das Ergebnis eines Zufallsexperiments könnt ihr nicht vorhersagen.

Ihr könnt aber berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass ein bestimmtes Ergebnis eintreten wird.

Diese Wahrscheinlichkeit hängt eng mit dem Begriff der relativen Häufigkeit zusammen. Relative Häufigkeiten könnt ihr berechnen, wenn ihr ein Zufallsexperiment mehrfach durchführt.

Beispiel 1.6:

Ein Würfel wird 500-mal geworfen und mit einer Strichliste notiert, wie häufig die einzelnen Ergebnisse auftreten. Die Anzahl der Striche für die einzelnen Ergebnisse wird **absolute Häufigkeit** genannt. In der folgenden Tabelle ist dargestellt, welche Augenzahlen mit welcher Häufigkeit aufgetreten sind:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	80	86	78	84	90	82

Die absolute Häufigkeit eines Ergebnisses sagt aus, wie oft das einzelne Ereignis bei der mehrmaligen Ausführung des Zufallsexperiments aufgetreten ist.

Die Summe der absoluten Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse muss die Anzahl aller Versuche ergeben.

Die Information darüber, dass 80-mal die Augenzahl "1" gewürfelt wurde, ist alleine nicht viel wert, da in der Anzahl "80" nicht die Aussage enthalten ist, wie oft insgesamt gewürfelt wurde.

Um beurteilen zu können, ob man in einem Versuch nun besonders häufig bzw. besonders selten eine bestimmte Augenzahl gewürfelt hat, benötigt man die **relative Häufigkeit** der einzelnen Ergebnisse.

Die *relative Häufigkeit eines Ergebnisses* gibt das Verhältnis der absoluten Häufigkeit des Ergebnisses zu der Anzahl der Versuche an:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit des Ergebnisses}}{\text{Anzahl aller Versuche}}$$

Für die obigen Augenzahlen ergeben sich folgende relativen Häufigkeiten:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Relative Häufigkeit	$\frac{80}{500}$	$\frac{86}{500}$	$\frac{78}{500}$	$\frac{84}{500}$	$\frac{90}{500}$	$\frac{82}{500}$

Die unterschiedlichen relativen Häufigkeiten der einzelnen Augenzahlen liegen natürlich an der Zufälligkeit beim Würfeln. Wenn man nochmals 500-mal würfeln würde, kann es sein, dass die Augenzahl "5" weniger auftritt und dafür die Augenzahl "1" häufiger.

Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses ist keine stabile Größe, sondern immer abhängig vom konkret durchgeführten Experiment. Man kann also keine relative Häufigkeit eines Ergebnisses angeben, ohne das Experiment selbst durchgeführt zu haben.

Wenn man ein Experiment jedoch sehr häufig durchführt (zum Beispiel 6000mal Würfeln) und aufgrund der Symmetrie des Würfels keine bestimmte Augenzahl bevorzugt ist, würde man feststellen, dass sich die relativen Häufigkeiten zwischen den einzelnen Augenzahlen kaum noch unterscheiden.

Der Sachverhalt, dass die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse bei sehr häufiger Durchführung eines Experiments eine stabile Zahl ergeben, wird als **Gesetz der großen Zahlen** bezeichnet

Diese stabile Zahl wird dann als *Wahrscheinlichkeit* für das jeweilige Ergebnis festgelegt.

Um beispielsweise festzustellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine zufällig ausgewählte Person Linkshänder ist, benötigt man die relative Häufigkeit für einen Linkshänder.

Wenn sich unter 2000 zufällig ausgewählten Personen 300 Linkshänder befinden, beträgt die relative Häufigkeit $\frac{300}{2000} = 0,15$.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Linkshänder würde man dann mit 0,15 ansetzen.

Bei den meisten Experimenten, die in der Schule betrachtet werden, ist die Angabe solch einer relativen Häufigkeit jedoch nicht notwendig.

Bei vielen Zufallsexperimenten besitzt jedes einzelne Ergebnis der Ergebnismenge aus physikalischen und symmetrischen Eigenschaften dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit.

Beispiele:

- Werfen einer idealen Münze
- Würfeln mit einem idealen Würfel
- Drehen eines Glücksrades mit lauter gleich großen Feldern
- Ziehung einer bestimmten Kugel aus einer Urne mit lauter unterschiedlichen Kugeln

Solche Experimente nennt man *Laplace-Experimente*.

Unter einer "idealen Münze" oder einem "idealen Würfel" versteht man solche, die vollkommen symmetrisch sind (also nicht verbeult oder in irgendeiner Form bearbeitet sind).

Dies hat zur Konsequenz, dass jede Münzseite bzw. Würfelseite dieselbe Chance besitzt, geworfen zu werden.

Wahrscheinlichkeitsberechnung bei Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment ist ein Laplace-Experiment, wenn jedes Ergebnis dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

Wenn n verschiedene Ergebnisse möglich sind, ist die Eintrittswahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A eintritt, gilt die Wahrscheinlichkeitsformel:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente in } A}{\text{Anzahl der Elemente in } S} = \frac{\text{Zahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Zahl aller möglichen Fälle}}$$

.....

Beispiel 1.7:

a) Würfeln mit einem idealen Würfel mit Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Jedes einzelne Würfelergebnis besitzt die Eintrittswahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$

Das Ereignis A : "Würfeln einer geraden Augenzahl" mit $A = \{2, 4, 6\}$ besitzt die

Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- b) Drehen eines Glücksrades mit 5 gleich großen Feldern und der Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Die Eintrittswahrscheinlichkeit für jedes Feld beträgt $\frac{1}{5}$.

Das Ereignis B: "Drehen einer Zahl größer als 3" mit $B = \{4, 5\}$ besitzt die Wahrscheinlichkeit $P(B) = \frac{2}{5}$.

- c) Eine Urne enthält 20 Kugeln mit den Nummern 1 - 20. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Die Ergebnismenge lautet $S = \{1, 2, \dots, 20\}$.

Die Eintrittswahrscheinlichkeit eine Kugel mit einer bestimmten Nummer zu ziehen beträgt $\frac{1}{20}$.

Das Ereignis C: "Ziehen einer Kugel mit einer Nummer größer als 10" mit $C = \{11, \dots, 20\}$ besitzt die Wahrscheinlichkeit $P(C) = \frac{10}{20}$.

Für Wahrscheinlichkeiten gelten die folgenden Regeln:

Für jedes Ereignis A gilt $0 \leq P(A) \leq 1$

Gilt $P(A) = 0$, dann tritt das Ereignis nie ein („unmögliches Ereignis“)

Gilt $P(A) = 1$, dann tritt das Ereignis immer ein („sicheres Ereignis“)

Beispiel 1.8:

- a) Aus dem Wort SCHAUFENSTERSCHEIBE wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt.

Das Wort besteht aus 19 Buchstaben.

Wahrscheinlichkeit für ein „S“: $P("S") = \frac{3}{19}$ (3 der 19 Buchstaben sind günstig)

Wahrscheinlichkeit für ein „E“: $P("E") = \frac{4}{19}$ (4 der 19 Buchstaben sind günstig)

- b) Eine Lostrommel enthält 400 Lose, 360 davon sind Nieten.
Es wird ein Los gezogen.

$$P(\text{Ziehung einer Niete}) = \frac{360}{400} = \frac{9}{10}$$

- c) Eine Urne enthält 5 rote, 3 blaue und 2 weiße Kugeln. Es wird 1 Kugel gezogen.

$$P(\text{Kugel ist rot}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Kugel ist blau}) = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{Kugel ist weiß}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{Kugel ist nicht weiß}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

- d) Ein Glücksrad besteht aus zwei Feldern: Ein rotes Feld mit Mittelpunktswinkel 210° und ein grünes Feld mit Mittelpunktswinkel 150° .

$$P(\text{Glücksrad bleibt auf rotem Feld stehen}) = \frac{210^\circ}{360^\circ} = \frac{7}{12}$$

$$P(\text{Glücksrad bleibt auf grünem Feld stehen}) = \frac{150^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{12}$$

.....

In dem folgenden Beispiel müssen relative Häufigkeiten vorgegeben sein, damit ihr Wahrscheinlichkeiten berechnen könnt.

.....

Beispiel 1.9:

- a) Bei einer Schraubenproduktion sind 2% aller Schrauben defekt.

$$P(\text{eine zufällig gezogene Schraube ist in Ordnung}) = 98\% = \frac{98}{100}$$

- b) Von 150 Personen in einer Firma kommen 40 Personen mit dem Bus

$$\text{Also gilt: } P(\text{eine zufällig ausgewählte Person kommt mit dem Bus}) = \frac{40}{150} = \frac{4}{15}$$

.....

1.3 Baumdiagramme und Pfadregeln

Damit ihr Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten berechnen könnt, benötigt ihr Baumdiagramme.

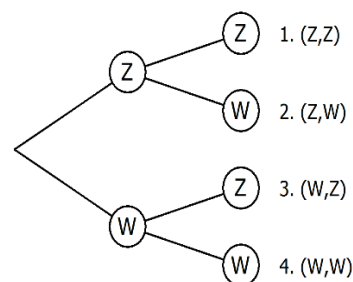
In einem Baumdiagramm könnt ihr alle möglichen Ergebnisse eines mehrstufigen Zufallsexperiments veranschaulichen. Jedes einzelne Ergebnis wird durch einen Weg (=Pfad) in dem Baumdiagramm symbolisiert.

.....

Beispiel 1.10:

- a) Eine Münze mit den Seiten Z(ahl) und W(appen) wird zweimal hintereinander geworfen.

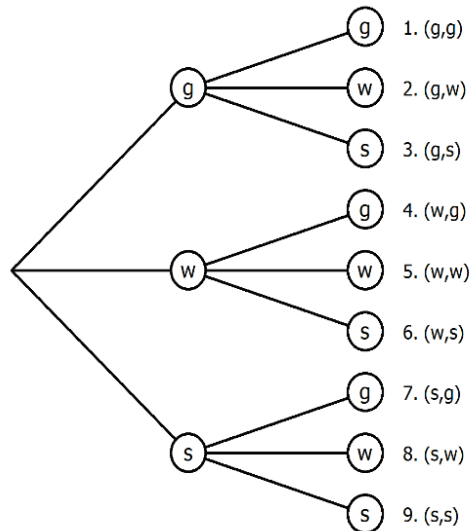
Es gibt 4 verschiedene Pfade, die ihr von links nach rechts durchlaufen könnt. Diese 4 Pfade sind (Z;Z) bzw. (Z;W) bzw. (W;Z) bzw. (W;W). Dies sind gleichzeitig die Elemente der Ergebnismenge $S = \{ (Z;Z), (Z;W), (W;Z), (W;W) \}$



- b) Eine Urne enthält gelbe, schwarze und weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Es gibt 9 verschiedene Pfade, die ihr von links nach rechts durchlaufen könnt.

Diese Pfade sind die Elemente der Ergebnismenge

$$S = \{ (g;g), (g;w), (g;s), (w;g), (w;w), (w;s), (s;g), (s;w), (s;s) \}$$

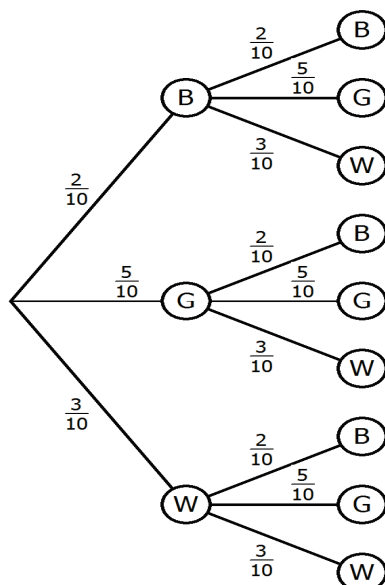


Um mit Baumdiagrammen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, müsst ihr bei den einzelnen Ästen Wahrscheinlichkeiten notieren, mit denen das Ergebnis am Ende des Astes erreicht wird.

Beispiel 1.11:

Aus einer Urne mit 2 blauen, 5 grünen und 3 weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.

Ziehung mit Zurücklegen



Ziehung ohne Zurücklegen

