



**Lineare Algebra  
erhöhtes Anforderungsniveau (eAn)**

Baden-Württemberg - berufliche Gymnasien  
Abitur 2027/2028

Autor: Alexander Schwarz

E-Mail: [aschwarz@mathe-aufgaben.com](mailto:aschwarz@mathe-aufgaben.com)

Homepage: [www.mathe-aufgaben.com](http://www.mathe-aufgaben.com)

## Vorwort

Zunächst einmal bedanken wir uns für das Vertrauen, das ihr uns mit dem Kauf dieses Buches entgegengebracht habt!

Der darin enthaltene Stoff der **Linearen Algebra** ist auf den Inhalt der **schriftlichen Abiturprüfung 2027 und 2028 (erhöhtes Anforderungsniveau, eAn)** von **Baden-Württemberg** für **berufliche Gymnasien (erhöhtes Anforderungsniveau)** abgestimmt.

Das Buch soll euch bei der erfolgreichen Vorbereitung auf Klausuren und die schriftliche Abiturprüfung unterstützen.

In den einzelnen Kapiteln stellen wir zunächst die einzelnen Themen und die erforderlichen Formeln und Rechenwege mit Hilfe von vielen Beispielen ausführlich vor.

Nach jedem Kapitel findet ihr viele Übungsaufgaben, bei denen der jeweilige Anforderungsbereich steht.

Anforderungsbereich I: Reproduktion des Stoffes (einfache Grundaufgaben)

Anforderungsbereich II: Herstellung von Zusammenhängen (mittelschwere Aufgaben)

Anforderungsbereich III: Verallgemeinerung und Reflexion (schwierigere Aufgaben)

Für das Erreichen von mindestens 5 Notenpunkten müssen die Aufgaben zum Anforderungsbereich I und teils auch vom Anforderungsbereich II gelöst werden.

Für das Erreichen von mindestens 11 Notenpunkten müssen die Aufgaben zu allen 3 Anforderungsbereichen gelöst werden.

Damit habt ihr die Möglichkeit zu prüfen, ob ihr den Stoff auch tatsächlich verstanden habt und wie euer ungefährer Leistungsstand ist.

*Die Musterlösungen aller Übungsaufgaben aus dem Buch werden als pdf-Dateien über einen geschlossenen Download-Bereich auf unserer Homepage zur Verfügung gestellt.*



### **VORSICHT FALLE:**

Nach unserer Erfahrung hilft es euch, wenn wir nicht nur darstellen, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche typischen Fehler auftreten können.

Daher findet ihr in dem Buch zwischendurch auch „Vorsicht Falle“ – Hinweise mit typischen Fehlern, die aufgrund unserer langjährigen Erfahrung immer wieder gemacht werden.

In diesem Buch sind keine Original-Abiturprüfungsaufgaben der vergangenen Jahre enthalten.

Die alten Abituraufgaben könnt ihr inkl. Lösungen kostenfrei auf [www.mathe-aufgaben.com](http://www.mathe-aufgaben.com) herunterladen.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von uns gerne entgegengenommen.

**Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung!**

**Euer Team von [mathe-aufgaben.com](http://mathe-aufgaben.com)**

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME .....</b>                             | <b>1</b>  |
| 1.1      | DAS GAUß-VERFAHREN .....                                           | 2         |
| 1.2      | LÖSUNGSMENGEN VON LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMEN .....                | 5         |
| <b>2</b> | <b>VEKTORRECHNUNG .....</b>                                        | <b>8</b>  |
| 2.1      | PUNKTE UND VEKTOREN .....                                          | 8         |
| 2.2      | RECHNEN MIT VEKTOREN .....                                         | 11        |
| 2.3      | LINEARKOMBINATION VON VEKTOREN UND MITTELPUNKT EINER STRECKE ..... | 16        |
| 2.4      | BETRAG VON VEKTOREN UND EINHEITSVEKTOREN .....                     | 19        |
| <b>3</b> | <b>SKALARPRODUKT, WINKELBERECHNUNG, BEWEISE.....</b>               | <b>22</b> |
| 3.1      | DEFINITION SKALARPRODUKT .....                                     | 22        |
| 3.2      | WINKEL ZWISCHEN VEKTOREN.....                                      | 24        |
| <b>4</b> | <b>GERADEN.....</b>                                                | <b>26</b> |
| 4.1      | GERADENGLEICHUNGEN.....                                            | 26        |
| 4.2      | LAGE VON GERADEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUM .....                   | 29        |
| 4.2.1    | Besondere Lage einer Gerade im Raum .....                          | 29        |
| 4.2.2    | Spurpunkte und Zeichnen von Geraden in ein Koordinatensystem ..... | 30        |
| 4.2.3    | Lage zweier Geraden im dreidimensionalen Raum .....                | 33        |
| 4.3      | MODELLIEREN VON GERADLINIGEN BEWEGUNGEN .....                      | 38        |
| <b>5</b> | <b>EBENEN .....</b>                                                | <b>43</b> |
| 5.1      | TYPEN VON EBENENGLEICHUNGEN .....                                  | 43        |
| 5.2      | AUFSTELLEN VON EBENENGLEICHUNGEN .....                             | 45        |
| 5.3      | DAS VEKTORPRODUKT ("KREUZPRODUKT") .....                           | 48        |
| 5.4      | UMFORMEN VON EBENENGLEICHUNGEN .....                               | 50        |
| 5.4.1    | Parameterform -> Koordinatengleichung .....                        | 50        |
| 5.4.2    | Koordinatengleichung -> Parameterform .....                        | 51        |
| 5.5      | LAGEBEZIEHUNG UND SCHNITT EINER GERADE MIT EINER EBENE .....       | 52        |
| 5.6      | LAGEBEZIEHUNG UND SCHNITT ZWEIER EBENEN.....                       | 56        |
| 5.7      | ZEICHNEN VON EBENEN .....                                          | 60        |
| 5.7.1    | Ebenen als Spurdreieck .....                                       | 60        |
| 5.7.2    | Ebenen parallel zu einer Koordinatenachse .....                    | 61        |
| 5.7.3    | Die drei Koordinatenebenen und ihre Parallelebenen .....           | 63        |
| <b>6</b> | <b>SCHNITTWINKEL BEI GERADEN UND EBENEN .....</b>                  | <b>66</b> |
| <b>7</b> | <b>ABSTANDSBERECHNUNGEN .....</b>                                  | <b>69</b> |
| 7.1      | ABSTAND ZWISCHEN ZWEI PUNKTEN .....                                | 69        |
| 7.2      | ABSTAND ZWISCHEN EINEM PUNKT UND EINER EBENE.....                  | 70        |
| 7.3      | ABSTAND ZWISCHEN ZWEI PARALLELEN EBENEN.....                       | 73        |
| 7.4      | ABSTAND ZWISCHEN EINER EBENE UND EINER PARALLELEN GERADEN .....    | 73        |
| 7.5      | ABSTAND ZWISCHEN EINEM PUNKT UND EINER GERADE .....                | 77        |
| 7.6      | ABSTAND ZWISCHEN ZWEI PARALLELEN GERADEN .....                     | 78        |
| <b>8</b> | <b>FLÄCHENINHALT UND VOLUMEN .....</b>                             | <b>80</b> |
| 8.1      | BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS VON VIERECKEN .....                  | 80        |
| 8.2      | BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS VON DREIECKEN .....                  | 81        |
| 8.3      | VOLUMEN VON PRISMEN UND PYRAMIDEN .....                            | 83        |
| <b>9</b> | <b>SPIEGELUNGEN .....</b>                                          | <b>87</b> |
| 9.1      | SPIEGELUNG PUNKT AN PUNKT .....                                    | 87        |

|           |                                  |           |
|-----------|----------------------------------|-----------|
| 9.2       | SPIEGELUNG PUNKT AN EBENE .....  | 87        |
| 9.3       | SPIEGELUNG GERADE AN EBENE ..... | 88        |
| 9.4       | SPIEGELUNG PUNKT AN GERADE ..... | 90        |
| <b>10</b> | <b>MATRIZENRECHNUNG.....</b>     | <b>91</b> |
| 10.1      | RECHNEN MIT MATRIZEN .....       | 91        |
| 10.2      | INVERSE MATRIX .....             | 100       |

# 1 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (das kürzen wir ab jetzt mit „LGS“ ab) besteht aus mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Die Anzahl der Gleichungen muss dabei nicht der Anzahl der Unbekannten entsprechen.

## Beispiel 1.1:

Lineare Gleichungssysteme sind zum Beispiel

$$\begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 & a + b = 5 & \\ a) \quad -5x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 & b) \quad a - b = 9 & c) \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 5 & 4a + b = 8 & -6x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{array}$$

- a) 3 Gleichungen mit 3 Variablen
- b) 3 Gleichungen mit 2 Variablen (mehr Gleichungen als Variable) „**überbestimmtes LGS**“
- c) 2 Gleichungen mit 3 Variablen (mehr Variable als Gleichungen) „**unterbestimmtes LGS**“

Das Ziel bei der Lösung eines LGS besteht darin, dass ihr für jede Variable eine Zahl findet, so dass alle Gleichungen des LGS gelöst werden.

Für das LGS in Beispiel 1.1 a) ist die Lösung  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ , was ihr durch

Einsetzen der Zahlen in die 3 Zeilen nachprüfen könnt:

Zeile 1:  $1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2$  passt

Zeile 2:  $-5 \cdot 1 - 2 + 4 \cdot 3 = 5$  passt

Zeile 3:  $6 \cdot 1 + 2 - 3 = 5$  passt

Diese Lösung war nun vorgegeben und ihr habt nur kontrolliert, dass die vorgegebene Lösung tatsächlich eine ist. Wie schafft ihr es aber, diese Lösung selbst zu berechnen?

Wir betrachten im nächsten Beispiel zunächst ein einfaches LGS, bei dem man die Lösung sofort ablesen kann.

## Beispiel 1.2:

Gegeben ist folgendes LGS:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 3x_2 + x_3 & = & 9 \\ 5x_3 & = & 15 \end{array}$$

Dieses LGS ist in der so genannten **Stufenform** dargestellt. Ihr könnt es von unten nach oben lösen:

Aus der 3. Zeile folgt:  $5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3$

Aus der 2. Zeile folgt:  $3x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow 3x_2 + 3 = 9 \Rightarrow x_2 = 2$

Aus der 1. Zeile folgt:  $2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

Die Lösungsmenge wird so dargestellt:  $L = \{(1 | 2 | 3)\}$

Hier darf die runde Klammer in den geschweiften Klammern nicht vergessen werden.

Die Lösung muss entsprechend den Variablen sortiert aufgeschrieben werden.

## 1.1 Das Gauß-Verfahren

Damit ihr ein LGS lösen könnt, müsst ihr es zunächst in die Stufenform bringen. Hierzu stehen euch folgende Umformungsmöglichkeiten zur Verfügung:

- Zwei Gleichungen des LGS vertauschen
- Eine Gleichung mit einer beliebigen Zahl  $b \neq 0$  durchmultiplizieren
- Zwei Gleichungen addieren oder subtrahieren

Das Rechenverfahren, um ein LGS in die Stufenform zu bringen, wird **Gauß-Verfahren** genannt. Dieses Gauß-Verfahren wird in Beispiel 1.3 vorgestellt:

### Beispiel 1.3:

Umwandlung eines LGS in Stufenform

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 14 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 10 \\ 5x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 18 \end{array}$$

Um Schreibarbeit zu sparen, schreibt ihr das LGS zunächst in eine Matrix. Hierbei werden nur die Koeffizienten (Zahlen vor den Variablen) und die Ergebnisspalte des LGS in Tabellenform aufgeschrieben. Die Variablen lasst ihr weg.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 18 \end{array} \right)$$

#### 1.Schritt:

Im ersten Schritt müsst ihr erreichen, dass die Zahlen in der linken Spalte unterhalb der obersten Zahl zu "0" werden.

Dies erreicht ihr zum Beispiel durch Addition der 1. und 2.Zeile bzw. der 1. und 3.Zeile.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 18 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{\cdot(-2)} \\ \xleftarrow{\cdot(-5)} \end{array}$$

#### Hinweis:

Damit die Zahl 2 in der 1.Spalte zu 0 wird, müsst ihr vorher die 1.Zeile mit -2 multiplizieren, damit bei der Addition  $-2 + 2 = 0$  ergibt. Bei der Addition der 1. und 3.Zeile muss die 1.Zeile zunächst mit -5 multipliziert werden.

Die Pfeile bedeuten hier eine Addition der entsprechenden Zeilen, wobei die Pfeilspitze dort hinzeigt, wo das Ergebnis der Summe stehen soll.

Die Zeile, von der die Pfeile wegzeigen (hier die 1.Zeile) schreibt ihr wieder ab.

Die Multiplikation mit -2 bzw. mit -5 erfolgt nur im Rahmen der Addition der Zeilen.

$$\text{Ergebnis: } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & -3 & -17 & -52 \end{array} \right)$$

2.Schritt:

Im zweiten Schritt müsst ihr durch Addition der 2. und 3. Zeile erreichen, dass der untere Eintrag in der 2.Spalte (hier -3) zu 0 wird. Auch hier müsst ihr vorher die Zeilen mit geeigneten Zahlen durchmultiplizieren.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & -3 & -17 & -52 \end{array} \right) \cdot (-3) \quad \leftarrow$$

Die 2. Zeile, von der der Pfeil weg zeigt, wird dabei wieder abgeschrieben.

Ergebnis in Stufenform: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Nun besitzt unser LGS die geforderte Stufenform und wir können es von unten nach oben lösen:

Aus der 3. Zeile folgt:  $x_3 = 2$

Aus der 2. Zeile folgt:  $-x_2 - 6 \cdot 2 = -18 \Rightarrow x_2 = 6$

Aus der 1. Zeile folgt:  $x_1 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 14 \Rightarrow x_1 = 0$

Lösungsmenge:  $L = \{ (0 \mid 6 \mid 2) \}$

.....

**VORSICHT FALLE:**

- Im 2. Schritt in Beispiel 1.3 dürft ihr nicht die 1. und 3. Zeile miteinander verrechnen, weil dadurch die Zahl 0 links unten, den ihr im 2. Schritt erzeugt habt, wieder zerstört werden würde.
- Wenn zu Beginn der Eintrag links oben 0 ist (siehe Fall A) oder eine höhere Zahl ist entspricht (siehe Fall B), solltet ihr zunächst Zeilen tauschen.

Fall A:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{array} \right)$$

Fall B:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 1 & -4 & -5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Die Vertauschung im Fall B ist sinnvoll, weil ihr dann im 1. Schritt mit einfacheren Zahlen multiplizieren könnt.

- In Beispiel 1.3 stehen in der Lösungsmenge zwar drei Zahlen, trotzdem hat das LGS nur **eine** Lösung (die aus 3 Zahlen besteht) und **nicht drei** Lösungen.

Nun könnte noch der Fall eintreten, dass ihr ein LGS lösen müsst, das auf der rechten Seite einen **Parameter** besitzt. Am Lösungsverfahren selbst ändert sich dadurch nichts – nur eure Lösung ist dann abhängig von dem Parameter.

**Beispiel 1.4:**  
Löse das LGS

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 2r \\ 5x_1 & -4x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 2r+6 \end{array}$$

Umwandlung in eine Matrix:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 5 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2r+6 \end{array} \right)$$

1. Schritt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 5 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2r+6 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-5) \quad \leftarrow \\ | \cdot 3 \quad \leftarrow \\ | \cdot (-3) \quad \leftarrow \end{array}$$

2. Schritt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 0 & -2 & -8 & -10r+6 \\ 0 & -11 & 7 & -4r-18 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-11) \quad \leftarrow \\ | \cdot 2 \quad \leftarrow \end{array}$$

Stufenform:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2r \\ 0 & -2 & -8 & -10r+6 \\ 0 & 0 & 102 & 102r-102 \end{array} \right)$$

Aus Zeile 3 folgt:  $102x_3 = 102r - 102 \Rightarrow x_3 = r - 1$

Aus Zeile 2 folgt:  $-2x_2 - 8(r - 1) = -10r + 6 \Rightarrow x_2 = r + 1$

Aus Zeile 1 folgt:  $3x_1 - 2(r + 1) + (r - 1) = 2r \Rightarrow x_1 = r + 1$

Lösungsmenge:  $L = \{ (r+1 \mid r+1 \mid r-1) \}$

## 1.2 Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

In den Beispielen in Kapitel 1.1 hatten die LGS genau eine Lösung. Dies ist jedoch nicht immer so, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen.

### Beispiel 1.5:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 3 \\ x_1 & +7x_2 & -3x_3 & = & 4 \end{array}$$

Umwandlung in eine Matrix:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right)$$

1.Schritt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-2) \quad \boxed{\phantom{00}} \quad | \cdot (-1) \quad \boxed{\phantom{00}} \\ \leftarrow \quad \quad \quad \leftarrow \end{array}$$

2.Schritt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad \boxed{\phantom{00}} \\ \leftarrow \end{array}$$

Stufenform:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die 3. Zeile der Matrix ist eine Nullzeile und stellt die **wahre Aussage**  $0 = 0$  dar.

Da ihr mit der 3. Zeile nichts berechnen könnt, könnt ihr diese Zeile für die weitere Berechnung ignorieren.

Dadurch bleibt ein unterbestimmtes LGS stehen, das 3 Variablen, aber nur 2 Gleichungen besitzt. Das LGS besitzt **unendlich viele Lösungen**.

Um die unendlich vielen Lösungen darzustellen, benötigt ihr einen Parameter  $t$ :

Ihr beginnt mit der 2. Zeile:  $10x_2 - 5x_3 = 5$ .

Da hier 2 Variable stehen, muss für eine Variable ein Parameter  $t$  eingesetzt werden:

Setze  $x_3 = t$  mit  $t \in \mathbb{R}$

Aus der 2. Zeile folgt:  $10x_2 - 5t = 5 \Rightarrow 10x_2 = 5 + 5t \Rightarrow x_2 = 0,5 + 0,5t$

Aus der 1. Zeile folgt:  $x_1 - 3(0,5 + 0,5t) + 2t = -1 \Rightarrow x_1 = 0,5 - 0,5t$

Lösungsmenge:  $L = \{(0,5 - 0,5t \mid 0,5 + 0,5t \mid t), t \in \mathbb{R}\}$

Wenn ihr für den Parameter  $t$  eine beliebige Zahl einsetzt, könnt ihr eine der unendlich vielen Lösungen bestimmen. Für  $t = 1$  ergibt sich z.B. die Lösung  $(0 \mid 1 \mid 1)$ .

Hinweis: Anstatt  $x_3 = t$  hättet ihr auch  $x_2 = t$  setzen können.

Aus der 2. Zeile folgt:  $10t - 5x_3 = 5 \Rightarrow -5x_3 = 5 - 10t \Rightarrow x_3 = -1 + 2t$

Aus der 1. Zeile folgt:  $x_1 - 3t + 2(-1 + 2t) = -1 \Rightarrow x_1 = 1 - t$

Lösungsmenge:  $L^* = \{(1 - t \mid t \mid -1 + 2t), t \in \mathbb{R}\}$

Auch wenn die Lösungsmengen  $L$  und  $L^*$  unterschiedlich aussehen, stimmen diese überein.

**VORSICHT FALLE:**

In der Lösungsmenge in Beispiel 1.4 kommt der Parameter  $r$  vor. Trotzdem handelt es sich hier nur um **eine Lösung**, da der Parameter  $r$  bereits in dem LGS enthalten war.

In der Lösungsmenge in Beispiel 1.5 kommt der Parameter  $t$  vor. Hier handelt es sich um **unendlich viele Lösungen**, da der Parameter  $t$  für eine Variable eingesetzt wurde.

**Beispiel 1.6:**

Löse das LGS

$$\begin{array}{rrcr} -7x_2 & -7x_3 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & -8x_2 & -5x_3 & = 5 \end{array}$$

Da links oben eine "0" steht, werden die ersten beiden Zeilen vertauscht.

Umwandlung in eine Matrix:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array} \right)$$

1. Schritt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

2. Schritt:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

Stufenform:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Die 3. Zeile der Matrix zeigt einen **Widerspruch**:  $0 = -2$   
Das heißt, dass das LGS **keine Lösung** besitzt.

Ein LGS kann eine der folgenden Lösungen besitzen:

- 1.) **keine** Lösung (Beispiel 1.6)
- 2.) **genau eine** Lösung (Beispiel 1.3 und 1.4)
- 3.) **unendlich viele** Lösungen (Beispiel 1.5)

**Übungsaufgaben****Aufgabe 1-1: (I)**

Löse das LGS.

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ \text{a) } x_1 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{b) } 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ \text{c) } 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ \text{d) } 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12 \\ -x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 5 \end{array}$$

**Aufgabe 1-2: (II)**

Löse das LGS.

$$\begin{array}{l} x_1 + 8x_2 = -1 \\ \text{a) } x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ \text{b) } 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{array}$$

**Aufgabe 1-3: (II)**

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{array}$$

- Bestimme die allgemeine Lösung des Gleichungssystems.
- Gib eine Lösung mit ganzzahligen Koeffizienten an.
- Gibt es eine Lösung, bei der alle drei Koordinaten gleich sind?

**Aufgabe 1-4: (I)**Löse das LGS in Abhängigkeit vom Parameter  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ \text{a) } x_1 - x_2 + x_3 = 1 + 3r \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3r \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ \text{b) } 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 4r \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 8r \end{array}$$

**Aufgabe 1-5: (II)**

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründe.

- Es gibt LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen, die keine Lösung besitzen.
- Ein LGS mit der gleichen Anzahl von Gleichungen und Variablen hat immer genau eine Lösung.
- Ein LGS mit mehr Gleichungen als Variablen kann unendlich viele Lösungen haben.
- Hat ein LGS mehr als eine Lösung, dann hat es unendlich viele Lösungen.

**Aufgabe 1-6: (III)**

Gib ein LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen an, bei dem in jeder Gleichung alle Variablen vorkommen und das die angegebene Lösungsmenge besitzt.

- $L = \{(2 \mid 3 \mid 1)\}$
- $L = \{ \}$
- $L = \{(1 \mid t \mid t), t \in \mathbb{R}\}$
- $L = \{(t-1 \mid t+1 \mid t), t \in \mathbb{R}\}$

## 2 Vektorrechnung

### 2.1 Punkte und Vektoren

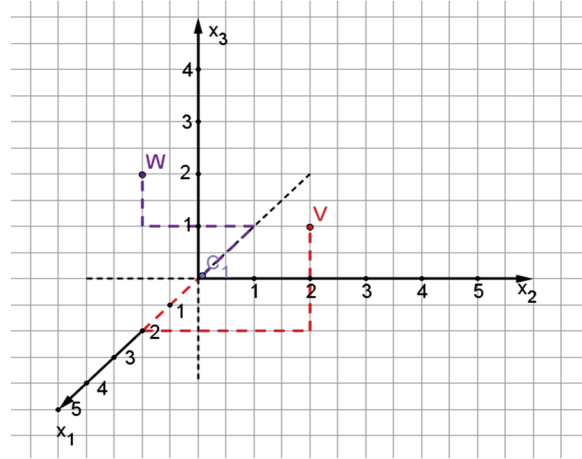
In der analytischen Geometrie arbeiten wir im dreidimensionalen Raum.

Da die Punkte drei Koordinaten benötigen, verwendet man als Koordinatensystem drei Achsen, die senkrecht aufeinander stehen und in der Regel Einheiten gemäß der folgenden Abbildung besitzen.

Ein Punkt im Koordinatensystem wird durch 3 Koordinaten festgelegt.

Den Punkt  $V(2|3|2)$  findet ihr, indem ihr vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten in  $x_1$ -Richtung, 3 Einheiten in  $x_2$ -Richtung und 2 Einheiten in  $x_3$ -Richtung wandert.

Analog findet ihr den Punkt  $W(-2|-2|1)$ .



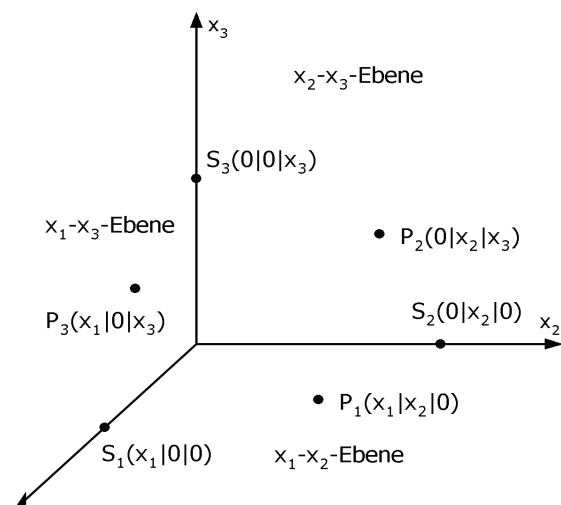
#### **VORSICHT FALLE:**

Es ist im dreidimensionalen Koordinatensystem nicht möglich, von einem markierten Punkt eindeutig auf dessen Koordinaten zurück zu schließen. Wäre beispielsweise oben nur der Punkt V markiert ohne die gestrichelten Linien, könnte V z.B. auch die Koordinaten  $V(0|2|1)$  haben.

Durch die Koordinatenachsen werden die drei Koordinatenebenen festgelegt, die in folgender Abbildung dargestellt sind.

Die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  liegen auf einer der **Koordinatenebenen**. Dies könnt ihr auch daran erkennen, dass bei den Punktkoordinaten genau ein Eintrag eine Null ist.

Die Punkte  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  liegen auf einer der **Koordinatenachsen**. Dies könnt ihr auch daran erkennen, dass bei den Punktkoordinaten zwei Einträge Null sind.



In der analytischen Geometrie lösen wir geometrische Probleme im dreidimensionalen Raum rechnerisch.

Es ist jedoch nicht möglich, mit Punkt bzw. deren Koordinaten selbst zu rechnen, das heißt ihr könnt Punkte z.B. nicht miteinander addieren. Zur Durchführung von Berechnungen benötigt ihr anstatt Punkte ersatzweise **Vektoren**.

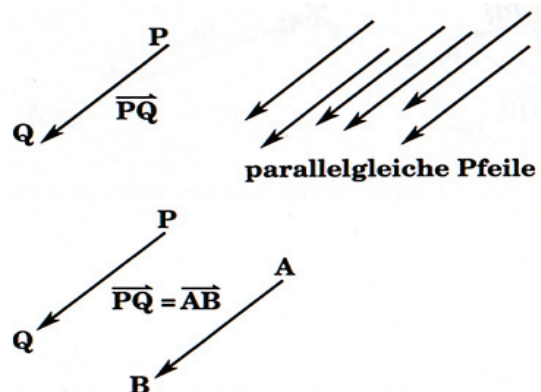
Vektoren könnt ihr euch anschaulich als Pfeile vorstellen. Um einen Pfeil zu zeichnen, benötigt ihr einen Anfangs- und einen Endpunkt. Der Vektor, der vom Punkt P zum Punkt Q zeigt, wird mit  $\overrightarrow{PQ}$  bezeichnet.

Ein Vektor ist festgelegt durch seine Länge, seine Richtung und seine Orientierung (wo der Pfeil hinzeigt).

**Zwei Vektoren, die in diesen drei Eigenschaften übereinstimmen, sind gleich.**

In der rechten Abbildung sind alle Vektoren **gleich** (alle sind gleich lang, sind parallel und zeigen in dieselbe Richtung).

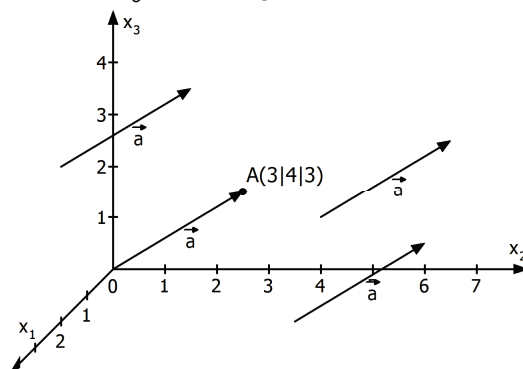
Es spielt für die Gleichheit der Vektoren keine Rolle, an welchem Punkt die starten.



### Beispiel 2.1:

Im Koordinatensystem sind Pfeile eingezeichnet, die alle den Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  darstellen.

Man startet von einem beliebigen Punkt, geht dann 3 Einheiten in  $x_1$ -Richtung, 4 Einheiten in  $x_2$ -Richtung und 3 Einheiten in  $x_3$ -Richtung.



Der Pfeil, der **im Ursprung (0|0|0) startet**, endet im Punkt A(3|4|3).

Der Punkt A hat dieselben Koordinaten wie der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , was natürlich kein Zufall ist.