

Lösungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gymnasium

Klasse 7 / 8

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2020

Aufgabe 1:

a) $P(\text{Karo} - \text{Bube}) = \frac{1}{32}$

b) $P(\text{Kreuz} - 7) = \frac{1}{32}$

c) $P(\text{schwarze Dame}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

d) $P(\text{König}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

e) $P(\text{rote Karte}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

f) $P(\text{kein Bube}) = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$

g) $P(\text{Dame oder roter Bube}) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Aufgabe 2:

a) $P(5) = \frac{1}{6}$

b) $P(\text{keine Drei}) = \frac{5}{6}$

c) $P(\text{gerade Zahl}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $P(\text{Primzahl}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(eine Primzahl ist eine Zahl, die genau zwei Teiler besitzt, die also nur durch 1 und sich selbst teilbar ist; die ersten Primzahlen lauten 2, 3, 5, 7, 11, ...)

Aufgabe 3:

Hier gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten

a) A: „Es wird das Feld mit der Zahl 1 gedreht“.

b) $P(B) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

B: „Es wird eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 gedreht“.

c) $P(C) = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

C: Es wird eine Zahl kleiner oder gleich 5 gedreht“.

d) $P(D) = 80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$

D: „Es wird eine Zahl kleiner oder gleich 8 gedreht“.

e) E: „Es wird eine Zahl von 1 bis 10 gedreht“.

Aufgabe 4:

$$P(A) = \frac{12}{25} \quad P(B) = \frac{13}{25} \quad P(C) = \frac{16}{25} \quad P(D) = P(2,3,5,7,11,13,17,19,23) = \frac{9}{25}$$

$$P(E) = P(1,5,7,11,13,17,19,23,25) = \frac{9}{25} \quad P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = \frac{16}{25}$$

Aufgabe 5:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad P(C) = P(2,3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 6:

a) Anzahl der Nieten: $200 \cdot \frac{70}{100} = 140$

Anzahl der Trostpreise: $\frac{2}{3} \cdot (200 - 140) = 40$

Anzahl der Gewinne: $200 - 140 - 40 = 20$

b) $P(A) = \frac{60}{200} = 0,3$ $P(B) = \frac{180}{200} = 0,9$

Aufgabe 7:

$$P(\text{Feld1}) = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6} \quad P(\text{Feld2}) = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3} \quad P(\text{Feld3}) = \frac{80^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{Feld4}) = \frac{100^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{18}$$

Aufgabe 8:

$$P(A) = \frac{18}{37} \quad P(B) = \frac{1}{37} \quad P(C) = \frac{11}{37} \quad P(D) = P(6,12,18,24,30,36) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(E) = P(0,10,20,30) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Aufgabe 9:

a) Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ergebnisse:

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Wahrsch.	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b) $P(A) = P(2;4;6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ $P(B) = P(1;4;6) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

$$P(C) = P(2;3;4;6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$c) P(D) = P(11;22;33;44;55;66) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$P(E) = P(56;65;66) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$$

Das Produkt zweier Zahlen ist ungerade, wenn beide Zahlen ungerade sind.

$$\text{Es gilt } P(\text{es wird eine ungerade Zahl gedreht}) = P(1,3,5) = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(F) = P(\text{Produkt ist ungerade}) = P(\text{beide Zahlen sind ungerade}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Aufgabe 10:

$$a) P(A) = P(2,4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = P(11) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$P(C) = P(111;222;333;444) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{12}$$

b)

Augenzahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

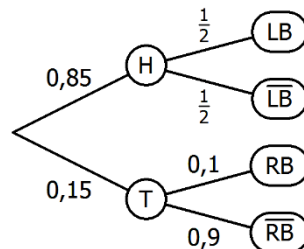
$$P(\text{Produkt ungerade}) = P(\{11;13;31;33\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{keine „3“ bei einmaligem Werfen}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{keine einzige „3“ bei zehnmaligem Werfen}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

Aufgabe 11:

Es handelt sich bei dem Experiment um ein zweistufiges Zufallsexperiment. In der ersten Stufe findet die Auswahl der Straße statt, in der der aus Süden kommende Autofahrer abbiegt (Hauptstraße H mit 85%, Talstraße T mit 15%). In der zweiten Stufe besteht das Experiment darin, ob der Autofahrer blinkt oder nicht (LB = links blinken, RB = rechts blinken).



a) $P(H \text{ und } \overline{LB}) = 0,85 \cdot \frac{1}{2} = 0,425$

$P(\text{Autofahrer verhält sich falsch})$

$$= P(H \text{ und } \overline{LB}) + P(T \text{ und } RB) = 0,85 \cdot \frac{1}{2} + 0,15 \cdot 0,1 = 0,44$$

- b) Die Wahrscheinlichkeit, dass **ein** Autofahrer auf der Hauptstraße weiterfährt, ohne links zu blinken, beträgt gemäß a) 0,425. Dies wird nun kurz mit Verhalten "A" bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass **ein** Autofahrer dies nicht macht, beträgt somit $1 - 0,425 = 0,575$. Dies wird nun kurz mit Verhalten "B" bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei 4 Autofahrern die ersten 3 gemäß A verhalten und der vierte Autofahrer gemäß B, beträgt $0,425^3 \cdot 0,575 = 0,0441$.

In dieser Wahrscheinlichkeit ist allerdings eine Reihenfolge enthalten, die so in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben ist. Welcher der 4 Autofahrer sich wie B verhält, spielt keine Rolle. Es ergeben sich somit folgende Reihenfolgemöglichkeiten:

AAAB, AABA, ABAA, BAAA (also 4 Stück).

$$P(\text{von 4 Autofahrern verhält sich genau einer gemäß B}) = 4 \cdot 0,0441 = 0,177.$$

Das Verhalten des fünften Autofahrers hat nichts mit dem Verhalten der ersten vier zu tun, also beträgt die Wahrscheinlichkeit 0,425.

$$P(\text{mindestens einer von 4 Fahrern verhält sich wie A}) = 1 - P(\text{keiner verhält sich wie A}) \\ = 1 - P(\text{alle verhalten sich wie B}) = 1 - 0,575^4 = 0,891$$

Aufgabe 12:

$$P(A) = P(111,222,333,444,555) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5 = \frac{1}{25}$$

$$P(B) = P(1, \text{keine Eins}, \text{keine Eins}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$$

$$P(C) = P(\text{genau zweimal die „2“}) = P(22\bar{2}; \bar{2}2\bar{2}; \bar{2}\bar{2}2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{125}$$

$$P(D) = 1 - P(\text{es wird dreimal keine „5“ gedreht}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}$$

Aufgabe 13:

$$a) P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$b) P(ILSE) = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{30}{50625} = \frac{2}{3375} \quad P(ELSE) = \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{675}$$

- c) Hier gibt es viele Lösungsmöglichkeiten. Die einfachste Lösung ist wohl diejenige, jeweils 3 Tischtennisbälle mit "E", "K", "L", "I" und "S" zu beschriften.

Aufgabe 14:

- a) Wahrscheinlichkeitsverteilung für dieses Zufallsexperiment:

Als Ergebnis des Experiments können die Werte 1,2,3 oder 4 entstehen.

$$P(\text{Kugel in Behälter 1}) = P(\text{Links, Links, Links}) = 0,5^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{Kugel in Behälter 2}) = P(\text{Links, Links, Rechts}) + P(\text{Links, Rechts}) \\ = 0,5^3 + 0,5^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{Kugel in Behälter 3}) = P(\text{Rechts, Links}) = 0,5^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Kugel in Behälter 4}) = P(\text{Rechts, Rechts}) = 0,5^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P(\text{Kugel in Behälter 2 oder 4}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$P(B) = P(\text{Kugel in Behälter 1 bis 3}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b) P(C) = P(\text{Behälter 1 und 1; Behälter 1 und 2; Behälter 2 und 1}) \\ = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{64}$$

Aufgabe 15:

Es gilt: $P(F) = 0,45$ und $P(V) = 0,35$ und $P(T) = 0,15$ und $P(H) = 0,05$.

$$a) P(A) = P(FF, VV, TT, HH) = 0,45^2 + 0,35^2 + 0,15^2 + 0,05^2 = 0,35$$

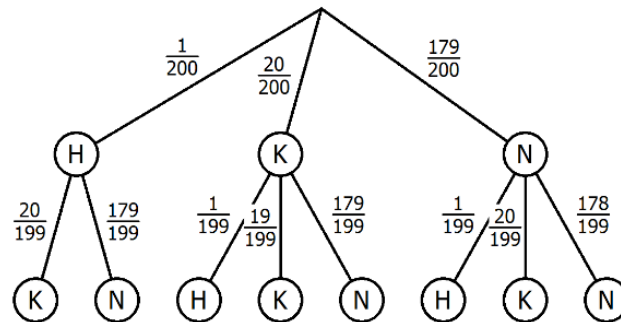
$$P(B) = P(\text{mindestens ein Fußballturnier}) = 1 - P(\text{kein Fußballturnier}) \\ = 1 - 0,55^2 = 0,6975$$

$$b) P(FTV) = 0,45 \cdot 0,15 \cdot 0,35 = 0,023625$$

$$P(\text{genau 2 Fußballturniere}) = P(\overline{FFF}, \overline{FFV}, \overline{FFT}) \\ = 0,45 \cdot 0,45 \cdot 0,55 + 0,45 \cdot 0,55 \cdot 0,45 + 0,55 \cdot 0,45 \cdot 0,45 = 0,334$$

Aufgabe 16:

a)



$$b) P(KK,KN,NK) = \frac{20}{200} \cdot \frac{19}{199} + \frac{20}{200} \cdot \frac{179}{199} + \frac{179}{200} \cdot \frac{20}{199} = 0,189$$

$$c) P(\text{mindestens einen Gewinn}) = 1 - P(\text{keinen Gewinn}) = 1 - \frac{179}{200} \cdot \frac{178}{199} \cdot \frac{177}{198} \cdot \dots > \frac{1}{3}$$

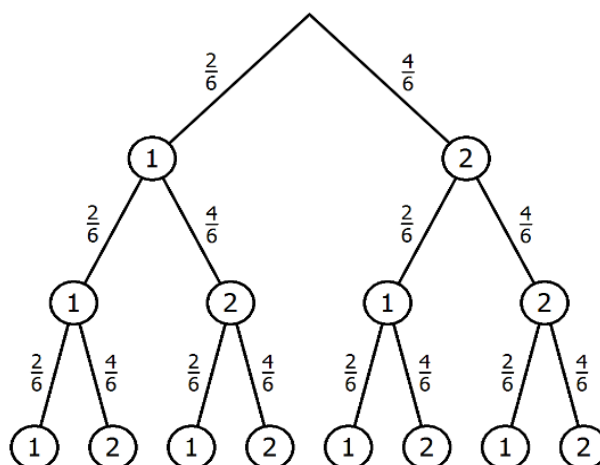
Man muss mit dem Taschenrechner ausprobieren, wie weit man multiplizieren muss, damit das Ergebnis größer als $\frac{1}{3}$ ist.

Man kann feststellen, dass $1 - \frac{179}{200} \cdot \frac{178}{199} \cdot \frac{177}{198} \cdot \frac{176}{197} = 0,3606 > \frac{1}{3}$ ist.

Eva muss mindestens 4 Lose ziehen.

Aufgabe 17:

a)



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(111) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27} \qquad P(112) = P(121) = P(211) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{27}$$

$$P(222) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27} \qquad P(122) = P(212) = P(221) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{27}$$

b) Die Augensumme kann die Werte 3, 4, 5 oder 6 annehmen.

$$P(\text{Augensumme } 3) = P(111) = \frac{1}{27}$$

$$P(\text{Augensumme } 4) = P(112) + P(121) + P(211) = 3 \cdot \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{Augensumme } 5) = P(122) + P(212) + P(221) = 3 \cdot \frac{4}{27} = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{Augensumme } 6) = P(222) = \frac{8}{27}$$

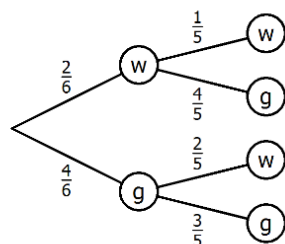
$$P(\text{Augensumme größer als } 4) = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$$

$$P(\text{Augensumme größer als } 4 \text{ oder gerade}) = P(\text{Augensumme ist } 4 \text{ oder } 5 \text{ oder } 6)$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{26}{27}$$

Lösung Aufgabe 18:

a)

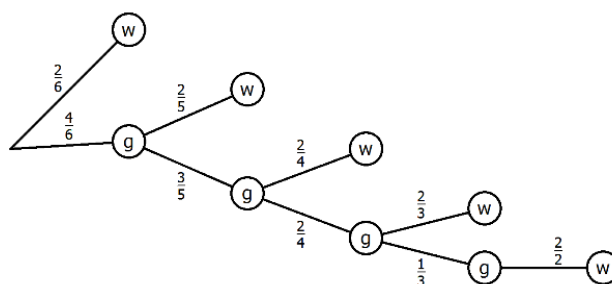


$$P(A) = P(gg) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = P(wg, gw) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

$$P(C) = 1 - P(gg) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

b)

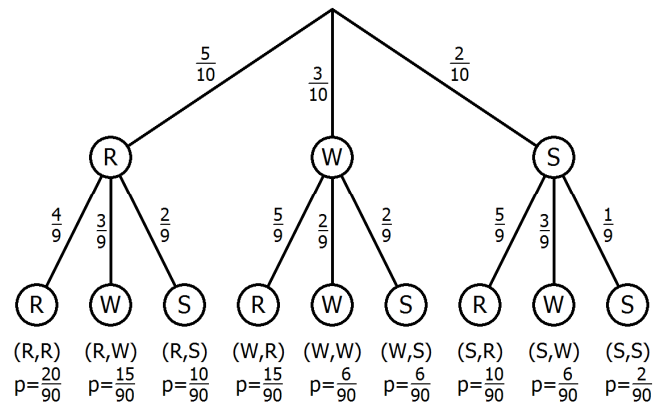


$$P(\text{Frank gewinnt}) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{Karl gewinnt}) = \frac{2}{5}$$

Lösung Aufgabe 11 (ZK 2001)

a)



Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse ergeben sich durch Multiplikation der entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten, zum Beispiel $P(RR) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$

$$b) P(A) = P(RR) + P(SS) + P(WW) = \frac{20}{90} + \frac{2}{90} + \frac{6}{90} = \frac{14}{45}$$

$$P(B) = P(WW, WS, SW, SS) = \frac{6}{90} + \frac{6}{90} + \frac{6}{90} + \frac{2}{90} = \frac{2}{9}$$

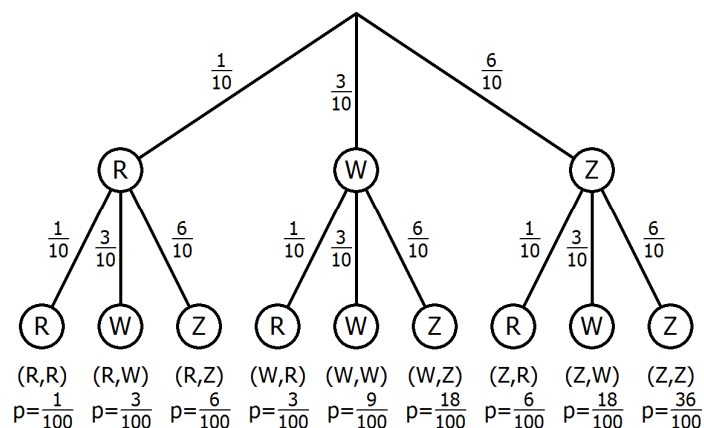
$$P(C) = P(RS, WS, SR, SW) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{16}{45}$$

Wenn die Klasse möglichst viel Gewinn einnehmen will, muss die Gewinnwahrscheinlichkeit möglichst klein sein, d.h. Variante B.

Lösung Aufgabe 12 (ZK 2002)

Es gilt $P(\text{Rand}) = 0,1$ und $P(\text{Wappen}) = 0,3$ und $P(\text{Zahl}) = 0,6$

a) Zweimaliges Werfen der Münze:



Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse ergeben sich durch Multiplikation der entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten, zum Beispiel $P(RR) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

$$P(A) = P(\text{höchstens einmal Zahl}) = 1 - P(ZZ) = 1 - \frac{36}{100} = 0,64$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\text{zweimal nicht Rand}) = P(WW) + P(WZ) + P(ZW) + P(ZZ) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0,81 \end{aligned}$$

$$P(C) = P(\text{höchstens einmal Zahl und nie Rand}) = P(WW) + P(WZ) + P(ZW) = 0,45$$

$$b) P(WRZ, WZR, ZRW, ZWR, RZW, RWZ) = 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 6 = 0,108$$

Der Faktor 6 kommt hinzu, weil es 6 verschiedene Anordnungen der Buchstaben W, R, Z gibt. Laut Aufgabenstellung spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge W, R und Z auftreten sollen.

$$c) P(\text{mindestens einmal R}) = 1 - P(\text{niemals R}) = 1 - 0,9^6 = 0,469$$

Wahrscheinlichkeit für Rand bei einer anderen Münze:

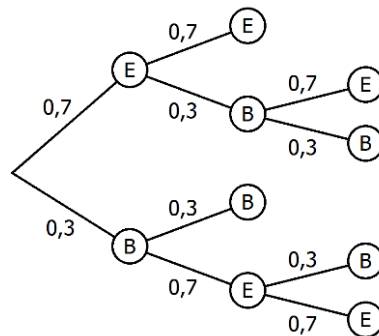
$$P(\text{niemals Rand}) = p$$

$$\text{Nun soll gelten: } 1 - p^6 = 0,3 \Rightarrow p = 0,942$$

$$\text{Somit } P(\text{Rand}) = 1 - P(\text{niemals Rand}) = 1 - 0,942 = 0,058$$

Aufgabe 21:

E = Eva gewinnt den Satz B = Bettina gewinnt den Satz



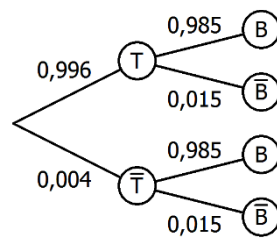
$$P(\text{"Eva gewinnt"}) = P(EE, EBE, BEE) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,784$$

Eva kann entweder 0 oder 1 oder 2 Sätze gewinnen.

$$P(\text{Eva gewinnt 0 Sätze}) = P(BB) = 0,3^2 = 0,09$$

$$P(\text{Eva gewinnt 1 Satz}) = P(EBB ; BEB) = 0,7 \cdot 0,3^2 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,126$$

$$P(\text{Eva gewinnt 2 Sätze}) = P(EE ; BEE ; EBE) = 0,784 \quad (\text{siehe } P(\text{"Eva gewinnt"}))$$

Aufgabe 22:

Die Türsicherung funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit von 99,6% = 0,996

Der Bewegungsmelder funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit von 98,5% = 0,985

$$P(\text{beide Sicherungen funktionieren}) = P(TB) = 0,996 \cdot 0,985 = 0,98106$$

$P(\text{ungehindertes Eindringen}) =$

$$P(\text{beide Sicherungen versagen}) = P(\bar{T}\bar{B}) = 0,004 \cdot 0,015 = 0,00006 = \frac{6}{100000}$$

Nun soll die Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bewegungsmelders reduziert werden.

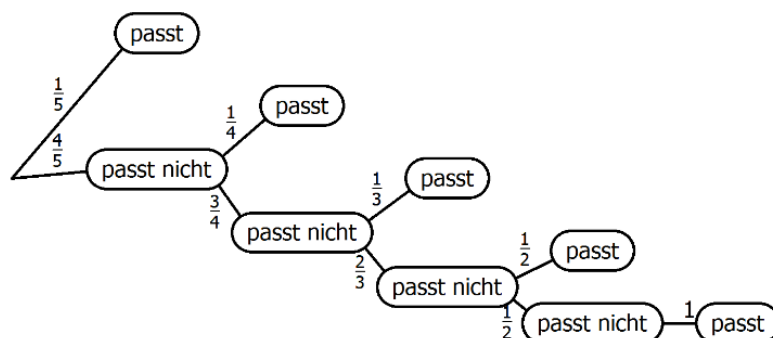
Die neue Wahrscheinlichkeit sei $P(\bar{B}) = p$.

$$\text{Nun soll gelten: } P(\bar{T}\bar{B}) = 0,004 \cdot p = \frac{1}{100000} \Rightarrow p = 0,0025 = 0,25\%$$

Der Bewegungsmelder sollte nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25% versagen.

Aufgabe 23:

a) Baumdiagramm:



$$P(\text{„Öffnung im 2. Versuch“}) = P(\text{„2. passt“}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

b) Hier gelten die Wahrscheinlichkeiten des obigen Baumdiagrammes nicht mehr, da nun keine Schlüssel mehr aussortiert werden (es wird zurückgelegt).

$P(\text{„spätestens beim 4. Versuch offen“}) =$

$$P(\text{„1. passt“}) + P(\text{„2. passt“}) + P(\text{„3. passt“}) + P(\text{„4. passt“})$$

$$P(\text{„1. passt“}) = \frac{1}{5} \quad P(\text{„2. passt“}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25} \quad P(\text{„3. passt“}) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$$

$$P(\text{„4.passt“}) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$$

$$P(\text{„spätestens beim 4.Versuch offen“}) = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} + \frac{64}{625} = \frac{369}{625}$$

Aufgabe 24:

- a) Zunächst müssen aufgrund der Gradzahlen die Wahrscheinlichkeiten für das Drehen der einzelnen Felder ermittelt werden.

$$P(\text{„1“}) = \frac{30}{360} = \frac{1}{12} ; P(\text{„2“}) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} ; P(\text{„3“}) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} ; P(\text{„4“}) = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = P(\text{„1“ oder „3“}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\text{zuerst „1“, dann „2“}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

$$P(C) = P(\text{keine „3“ bei drei Drehungen}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

- b) Um den Mittelpunktswinkel zu berechnen, muss die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, mit der die Zahl 1 bei einer Drehung gezogen wird.
Es soll gelten: $P(\text{bei einmaligem Drehen erscheint die 1}) = p$.

Bedingung aus der Aufgabe: $P(\text{höchstens zweimal die 1}) = 0,999$

Nun arbeitet man mit dem Gegenereignis:

$$P(\text{höchstens zweimal die 1}) = 1 - P(\text{dreimal die 1}) = 1 - p^3$$

$$\Rightarrow 1 - p^3 = 0,999 \Rightarrow p = \sqrt[3]{0,001} = 0,1$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung einer 1 muss bei $0,1 = 10\%$ liegen.
Der zugehörige Mittelpunktswinkel ist demnach 10% von 360° , also 36° .

Aufgabe 25:

- a) $P(\text{Augenzahl } 1) = 0,3$ (gemäß Aufgabenstellung)
 $P(\text{Augenzahl } 6) = 0,1$ (gemäß Aufgabenstellung)

Für die restlichen Augenzahlen 2,3,4 und 5 bleibt noch eine gesamte Restwahrscheinlichkeit von $1 - 0,3 - 0,1 = 0,6$ übrig.

Da die Augenzahlen 2,3,4 und 5 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten gilt:

$$P(\text{Augenzahl } 2) = P(\text{Augenzahl } 3) = P(\text{Augenzahl } 4) = P(\text{Augenzahl } 5) = 0,6:4 = 0,15$$

$$P(\text{gerade Augenzahl}) = P(\text{Augenzahl } 2 \text{ oder } 4 \text{ oder } 6) = 0,15 + 0,15 + 0,1 = 0,4$$

- b) $P(A) = P(666) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$

$$P(B) = P(111, 222, 333, 444, 555, 666) = 0,3^3 + 0,15^3 + 0,15^3 + 0,15^3 + 0,15^3 + 0,1^3 = 0,0415$$

Ereignis C: Genau eine Sechs bedeutet, dass man bei dreimaligem Werfen zweimal keine Sechs und genau einmal eine Sechs würfelt.

Wahrscheinlichkeit „keine 6“ : $1 - P(6) = 1 - 0,1 = 0,9$ (Gegenereignis)

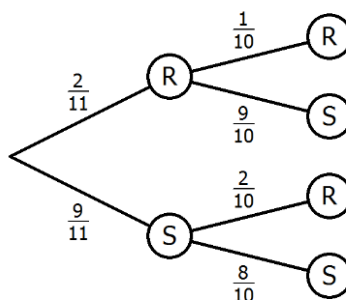
$$P(6, \text{keine } 6, \text{keine } 6) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,081$$

In dieser Berechnung ist jedoch noch die Reihenfolge enthalten, dass zunächst die „6“ und dann zweimal „keine 6“ geworfen wird. Die Reihenfolge spielt jedoch beim Ereignis C keine Rolle.

$$P(C) = P(6, \text{keine } 6, \text{keine } 6) + P(\text{keine } 6, 6, \text{keine } 6) + P(\text{keine } 6, \text{keine } 6, 6) \\ = 0,081 \cdot 3 = 0,243$$

Aufgabe 26:

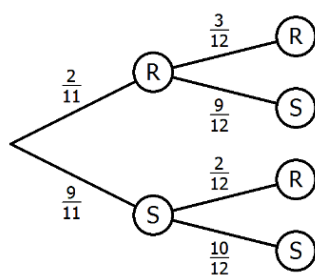
- a) Die „gleichzeitige“ Ziehung bedeutet ein Ziehen ohne Zurücklegen. Die Ziehung kann für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit als zwei Ziehungen ohne Zurücklegen interpretiert werden, wobei die Reihenfolge der gezogenen Kugeln unbedeutend ist.



$$P(RR) = \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{55}$$

$$P(\text{genau eine Kugel rot}) = P(RS) + P(SR) = \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{18}{55}$$

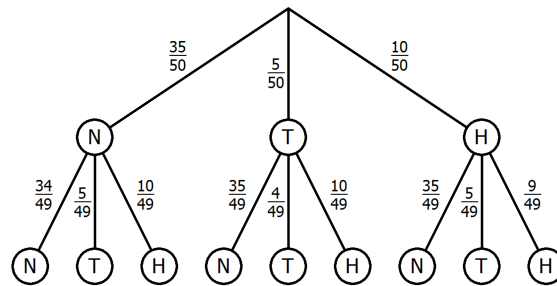
b) Baumdiagramm für die neue Spielregel:



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(sr) + P(rr)$

$$\text{Es gilt } P(sr) = \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{12} = \frac{3}{22} \text{ und } P(rr) = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{22}$$

$$P(\text{zweite Kugel ist rot}) = P(sr) + P(rr) = \frac{3}{22} + \frac{1}{22} = \frac{2}{11}$$

Aufgabe 27:

$$a) P(A) = P(NH, HN) = \frac{35}{50} \cdot \frac{10}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{35}{49} = 0,286$$

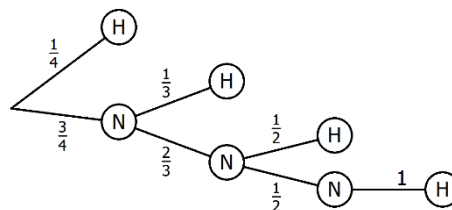
$$P(B) = P(NT, TT, HT) = \frac{35}{50} \cdot \frac{10}{49} + \frac{10}{50} \cdot \frac{35}{49} = 0,286$$

Gegenereignis von C: Lisa zieht zwei Nieten

$$P(\bar{C}) = P(NN) = \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} = 0,486$$

$$\Rightarrow P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,486 = 0,514$$

b)



Peter bekommt den Hauptpreis bei folgenden Pfaden des Baumdiagramms:
H oder NNH

$$P(H, NNH) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter den Hauptpreis bekommt, liegt bei 0,5 = 50%.

Aufgabe 28:

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$$

$$P(B) = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064$$

(Erklärung: Die Mannschaft verliert nicht mit Wahrscheinlichkeit $0,1 + 0,3 = 0,4$)

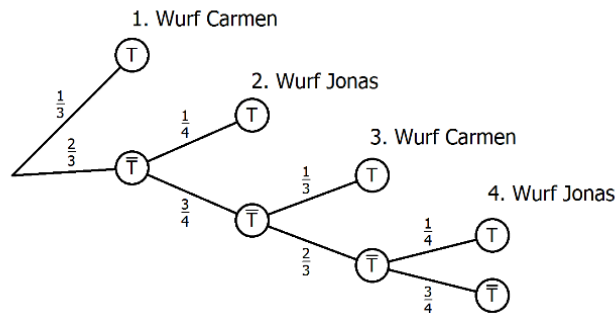
$$P(C) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \cdot 3 = 0,027$$

Erklärung: Da die Mannschaft zweimal unentschieden spielt, kommt der Faktor 0,1 zweimal vor. Danach soll die Mannschaft nicht unentschieden spielen, was mit Wahrscheinlichkeit 0,9 vorkommt.

Der Faktor 3 entsteht deshalb, weil es drei verschiedene Möglichkeiten gibt, die drei Spiele anzuordnen: $UU\bar{U}$ oder $U\bar{U}U$ oder $\bar{U}UU$

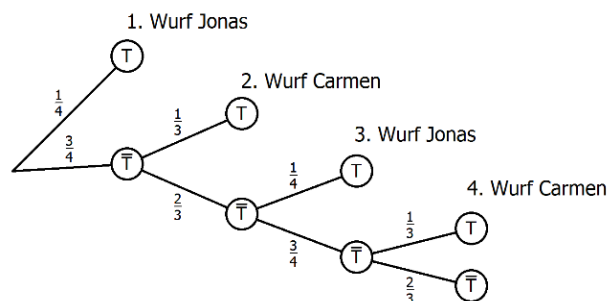
Aufgabe 29:

a)



$$P(\text{Carmen gewinnt}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

b)

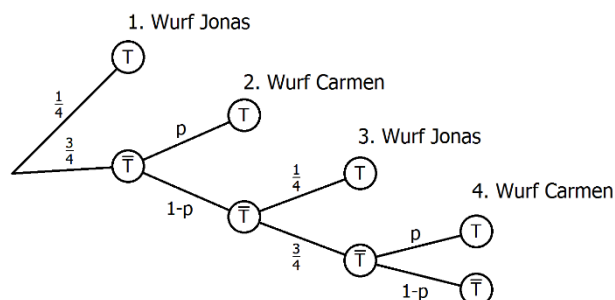


$$P(\text{Jonas gewinnt}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{Carmen gewinnt}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$$

Die Behauptung stimmt.

- c) Die unbekannte Wahrscheinlichkeit, mit der Carmen und trifft sei p .
Die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht trifft, ist $1-p$.



Carmen gewinnt das komplette Spiel gemäß Aufgabenstellung mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

$$\text{Somit gilt: } \frac{3}{4} \cdot p + \frac{3}{4} \cdot (1-p) \cdot \frac{3}{4} \cdot p = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}p + \frac{9}{16}p - \frac{9}{16}p^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{9}{16}p^2 + \frac{21}{16}p - \frac{2}{3} = 0 \stackrel{\cdot 48}{\Rightarrow} -27p^2 + 63p - 32 = 0$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-63 \pm \sqrt{63^2 - 4 \cdot 27 \cdot 32}}{-54} = \frac{-63 \pm \sqrt{513}}{-54} \Rightarrow p_1 \approx 0,747 \text{ und } p_2 \approx 1,586$$

Da eine Wahrscheinlichkeit nicht größer als 1 sein kann, ist die neue Trefferwahrscheinlichkeit von Carmen 0,747.

Aufgabe 30:

- a) Die Würfel an den Ecken des großen Würfels haben drei rote Seitenflächen.

$$P(\text{Würfel mit 3 roten Seitenflächen wird gezogen}) = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$$

Die Würfel im Inneren des großen Würfels haben keine rote Seitenfläche.

Dies sind $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ Würfel.

$$P(\text{Würfel ohne rote Seitenfläche wird gezogen}) = \frac{512}{1000} = \frac{64}{125}$$

Die Würfel, die auf einer Seitenfläche des großen Würfels liegen und nicht am Rand außen, haben eine rote Seitenfläche. Dies sind $8 \cdot 8 \cdot 6 = 384$ Würfel.

Damit gibt es $1000 - 8 - 512 - 384 = 96$ Würfel mit zwei roten Seitenflächen.

$$P(\text{Würfel mit höchstens einer roten Seitenfläche}) = \frac{512}{1000} + \frac{384}{1000} = \frac{112}{125}$$

$$b) P(\text{vier Würfel in beschriebener Reihenfolge}) = \frac{8}{1000} \cdot \frac{96}{999} \cdot \frac{384}{998} \cdot \frac{512}{997} \approx 1,519 \cdot 10^{-4}$$

- c) $P(\text{drei Würfel mit einer, zwei und drei roten Seitenflächen}) =$

$$\frac{384}{1000} \cdot \frac{96}{1000} \cdot \frac{8}{1000} \cdot 6 \approx 0,00177$$

Hinweis: Der Faktor 6 ist erforderlich, weil es auf die Ziehungsreihenfolge nicht ankommt und es sechs verschiedene Reihenfolgen gibt, wie die drei Würfel gezogen werden können.

Aufgabe 31:

$$a) P(A) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \quad P(C) = \frac{150}{360} = \frac{5}{12}$$

$$P(D) = P(1) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{2}{3} \quad P(E) = P(222) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$P(E) = P(\text{höchstens einmal die 3}) = P(\text{keine 3}) + P(\text{genau einmal die 3})$$

$$P(\text{keine 3}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{343}{1728}$$

$$P(\text{genau einmal die 3}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot 3 = \frac{245}{576}$$

Hinweis: Der Faktor 3 ist erforderlich, da keine Reihenfolge vorgegeben ist und es drei verschiedene Reihenfolgen für die Drehungen gibt.

$$P(E) = \frac{343}{1728} + \frac{245}{576} = \frac{539}{864}$$

- b) Gesucht ist die Trefferwahrscheinlichkeit p für die Zahl 1.

$$P(\text{mindestens einmal die "1" bei 10 Drehungen}) = 0,99$$

$$1 - P(\text{niemals die "1" bei 10 Drehungen}) = 0,99$$

$$1 - (1 - p)^{10} = 0,99 \Rightarrow 1 - p = \sqrt[10]{0,01} \approx 0,631 \Rightarrow p \approx 0,369$$

Der gesuchte Mittelpunktswinkel beträgt $0,369 \cdot 360^\circ \approx 133^\circ$

Aufgabe 32:

- a) Der Spielstein ist bei der Marke +3, wenn dreimal nacheinander eine schwarze Karte gezogen wird.

$$P(\text{Spielstein bei Marke +3}) = P(\text{dreimal schwarz}) = \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31} \cdot \frac{14}{30} = \frac{7}{62}$$

Der Spielstein ist bei der Marke -1, wenn zwei rote und eine schwarze Karte gezogen wird - egal in welcher Reihenfolge.

$$P(\text{Spielstein bei Marke -1}) = P(\text{rrs}) + P(\text{rsr}) + P(\text{srr}) = \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31} \cdot \frac{16}{30} \cdot 3 = \frac{12}{31}$$

Nach 5 Zügen ist man 5 Einheiten vom Nullpunkt entfernt, wenn man entweder 5 rote oder 5 schwarze Karten zieht.

$$\begin{aligned} P(5 \text{ Einheiten vom Nullpunkt entfernt}) &= P(\text{sssss}) + P(\text{rrrrr}) \\ &= \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31} \cdot \frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} \cdot \frac{12}{28} + \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31} \cdot \frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} \cdot \frac{12}{28} = \frac{39}{899} \end{aligned}$$

- b) Der Spielstein steht wieder bei der Nullmarke, wenn genau so viele schwarze wie rote Karten gezogen werden.

Bei fünf Zügen ist es daher nicht möglich, wieder bei der Nullmarke zu landen:

$$P(\text{bei fünf Zügen bei Nullmarke}) = 0$$

$$P(\text{bei vier Zügen bei Nullmarke}) = P(\text{ssrr}) + P(\text{srrs}) + P(\text{srsr}) + P(\text{rrss}) + P(\text{rsrs}) + P(\text{rrsr})$$

$$= \frac{16}{32} \cdot \frac{15}{31} \cdot \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot 6 = \frac{360}{899}$$

- c) Der Kartenstapel ist nach 32 Ziehungen aufgebraucht und es sind je 16 Züge des Spielsteins nach links und nach rechts erfolgt. Der Stein steht demnach wieder an der Nullmarke.

Aufgabe 33:

$$a) P(A) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{14}$$

$$P(B) = 1 - P(\text{kein Kärtchen trägt eine negative Zahl}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

$$P(C) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{7}$$

$$P(D) = P(\text{ppp}) + P(\text{nnp}) + P(\text{nnp}) + P(\text{pnn}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot 3 = 0,5$$

$$\text{b) } P(\text{positives Produkt}) = P(pp) + P(nn) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

$$P(\text{negatives Produkt}) = 1 - P(\text{positives Produkt}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Ein negatives Produkt ist wahrscheinlicher.

Aufgabe 34:

$$\text{a) } P(A) = P(\text{höchstens Augenzahl 2}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = P(1 \text{ und } 3) + P(3 \text{ und } 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$P(C) = P(111) + P(222) + P(333) + P(444) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{12}$$

D: Das Produkt ist ungerade, wenn beide Augenzahlen ungerade sind.

$$P(D) = P(11) + P(13) + P(31) + P(33) = \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{b) } P(\text{keine "1" bei fünfmaligem Werfen}) = \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(\text{genau viermal "1"}) = \left(\frac{3}{6}\right)^4 \cdot \frac{3}{6} \cdot 5 = \frac{5}{32}$$

Der Faktor 5 ist erforderlich, weil die "Nicht 1" an fünf verschiedenen Stellen geworfen werden kann.